ГЛАВА 2

ТРОЙНЫЕ И МНОГОКРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В предыдущей главе мы ввели понятие двойного интеграла. Сейчас мы определим интеграл от функции трех переменных, так называемый *тройной интеграл*. Тройные интегралы, подобно двойным, находят широкое применение в различных физических и геометрических задачах. Некоторые из этих задач будут рассмотрены в § 3.

Между тройными интегралами и двойными существует почти полная аналогия. Те доказательства, которые не отличаются сколь-нибудь существенно от доказательств соответствующих утверждений для двойных интегралов, мы будем, как правило, опускать.

В § 5 этой главы будет дано понятие о многократных интегралах, т. е. об интегрировании функций произвольного числа независимых переменных.

§ 1. Определение и основные свойства тройного интеграла

1. Предварительные замечания. Объем пространственной фигуры. Понятия внутренней точки области, границы, замкнутой области, диаметра и т. д., определенные в § 1 гл. 1 для плоскости, переносятся без всяких изменений на случай трехмерного пространства.

Вводя двойной интеграл, мы пользовались понятием площади. Аналогично определение тройного интеграла опирается на понятие объема пространственной фигуры.

Определение объема многогранника мы считаем известным из элементарной геометрии. Распространить это понятие на более широкий класс фигур можно так же, как в § 1 гл. 1 мы распространили понятие площади с многоугольных фигур на криволинейные квадрируемые фигуры. Изложим вкратце соответствующие рассуждения.

Объем $V(P)$ многогранного тела (т. е. тела, составленного из конечного числа многогранников) представляет собой неотрицательную величину, обладающую следующими свойствами:

1 (монотонность). *Если P и Q — два многогранных тела и P содержится в Q, то*

$$V(P) \leqslant V(Q).$$

2 (аддитивность). *Если P и Q — два многогранных тела без общих внутренних точек, то*

$$V(P+Q) = V(P) + V(Q).$$

3 (инвариантность). *Если многогранные тела P и Q конгруэнтны между собой, то их объемы равны.*

Эти три свойства должны быть сохранены при распространении понятия объема с многогранных тел на более общий класс кубируемых тел.

Возьмем произвольное пространственное тело*) Φ и рассмотрим всевозможные вложенные в него многогранные тела; точную верхнюю грань их объемов назовем *внутренним объемом* тела Φ (если тело Φ таково, что внутрь него вообще нельзя поместить ни одного невырожденного многогранного тела, то его внутренний объем мы положим по определению равным нулю). Точную нижнюю грань объемов многогранных тел, объемлющих тело Φ, мы назовем его *внешним объемом*. Если внешний объем тела Φ равен его внутреннему объему, то это общее их значение называется просто *объемом тела* Φ, а само это тело называется *кубируемым*. Аналогично теореме 1.2 доказывается следующая теорема:

Теорема 2.1. *Тело Φ кубируемо в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два таких многогранных тела $P \subset \Phi$ и $Q \supset \Phi$, что*

$$V(Q) - V(P) < \varepsilon.$$

Мы скажем, что некоторое множество имеет объем нуль, если его можно поместить внутрь многогранного тела сколь угодно малого объема. Пользуясь этим понятием, мы можем теорему 2.1 сформулировать так:

Чтобы тело Φ было кубируемо, необходимо и достаточно, чтобы его граница имела объем нуль.

Этот критерий позволяет установить кубируемость достаточно широких классов тел. Например, кубируемо всякое тело, составленное из конечного числа криволинейных цилиндров, каждый из которых имеет квадрируемое основание, а сверху ограничен поверхностью, задаваемой уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — непрерывная функ-

*) То есть некоторое ограниченное множество точек в пространстве.

ция. Объем каждого такого цилиндра представляется двойным интегралом

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\,dx\,dy,$$

взятым по основанию этого цилиндра.

Другой важный класс кубируемых тел — это пространственные области, ограниченные конечным числом гладких *) поверхностей. Доказательство того, что область, ограниченная гладкими поверхностями, кубируема, по существу, аналогично доказательству того, что гладкая кривая имеет площадь нуль, но несколько более громоздко. Мы не будем приводить его.

Повторив рассуждения, проведенные в п. 4 § 1, можно установить справедливость следующих утверждений:

1) *Если* Φ_1 *и* Φ_2 — *два кубируемых тела, то их объединение* Φ — *кубируемое тело, и если тела* Φ_1 *и* Φ_2 *не имеют общих внутренних точек, то объем* Φ *равен сумме объемов* Φ_1 *и* Φ_2.

2) *Пересечение* (общая часть) *двух кубируемых тел есть кубируемое тело.*

Замечание. Обратим внимание на то, что к понятию объема у нас имеются два различных по форме подхода.

С одной стороны, мы определили объем криволинейного цилиндра с квадрируемым основанием G, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, как двойной интеграл

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\,dx\,dy.$$

С другой стороны, мы ввели понятие объема кубируемого тела с помощью аппроксимации такого тела (изнутри и снаружи) многогранными телами. Можно, однако, показать, что для достаточно широкого класса тел (во всяком случае, для тел, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями) оба эти подхода равносильны.

2. Определение тройного интеграла. Пусть на кубируемом теле V задана ограниченная функция $f(x, y, z)$. Разобьем V на части V_i и, произвольно выбрав в каждой из V_i некоторую точку (ξ_i, η_i, ζ_i), составим сумму

$$T = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta v_i, \tag{2.1}$$

где Δv_i — объем элемента V_i, а сумма берется по всем элементам разбиения. Введем следующие определения.

---

*) Поверхность называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости меняется непрерывно.

Определение 1. *Пусть D — наибольший из диаметров $d(V_i)$ элементов V_i, на которые разбито тело V. Число J называется пределом интегральных сумм* (2.1) *при $D \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$|T - J| < \varepsilon,$$

как только $D < \delta$.

Иначе говоря, неравенство $|T - J| < \varepsilon$ должно выполняться для каждой интегральной суммы T, отвечающей любому разбиению $\{V_i\}$, для которого $D < \delta$, и любому выбору точек (ξ_i, η_i, ζ_i) в каждом из V_i.

Определение 2. *Если предел интегральных сумм* (2.1) *при $D \to 0$ существует, то он называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по V и обозначается символом*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv \quad \text{или} \quad \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Функция $f(x, y, z)$ при этом называется *интегрируемой* по V.

3. Условия существования тройного интеграла. Интегрируемость непрерывных функций. Как и в случае одной или двух переменных, не всякая ограниченная функция $f(x, y, z)$ интегрируема. Для нахождения достаточных условий существования тройного интеграла используют обычно, как и в случае двойных или однократных интегралов, верхние и нижние суммы Дарбу.

Пусть $f(x, y, z)$ — ограниченная функция, заданная на кубируемом теле V, $\{V_i\}$ — некоторое разбиение этого тела и M_i, m_i — соответственно точная верхняя и точная нижняя грани значений функции $f(x, y, z)$ на V_i. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta v_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta v_i$$

(здесь Δv_i — объем элемента V_i) называются соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу* для функции $f(x, y, z)$ и данного разбиения $\{V_i\}$ тела V. Свойства верхних и нижних сумм Дарбу, сформулированные в § 2 гл. 1, дословно переносятся на случай трех переменных.

С помощью рассуждений, в точности повторяющих доказательство теоремы 1.3, доказывается следующее необходимое и достаточное условие существования тройного интеграла:

Теорема 2.2. *Ограниченная на кубируемом теле V функция $f(x, y, z)$ интегрируема по V в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение тела V, что разность между верхней и нижней суммами Дарбу для функции $f(x, y, z)$, отвечающими этому разбиению, меньше ε.*

С помощью этого критерия устанавливаются следующие теоремы, аналогичные теоремам 1.4 и 1.4′ для двойных интегралов.

Теорема 2.3. *Всякая функция $f(x, y, z)$, непрерывная в замкнутой ограниченной*) области V, интегрируема в этой области.*

Теорема 2.4. *Если функция $f(x, y, z)$ ограничена в замкнутой ограниченной*) области и непрерывна в этой области всюду, кроме, быть может, точек, принадлежащих некоторому множеству объема нуль, то $f(x, y, z)$ интегрируема по этой области.*

4. Свойства тройных интегралов. Основные свойства тройных интегралов вполне аналогичны свойствам двойных интегралов. Перечислим их.

1—2 (линейность). *Если $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ интегрируемы по области V, а k_1 и k_2 — постоянные, то $k_1f_1+k_2f_2$ интегрируема по V* и

$$\iiint\limits_V [k_1f_1(x, y, z)+k_2f_2(x, y, z)]\,dv = k_1\iiint\limits_V f_1(x, y, z)\,dv + k_2\iiint\limits_V f_2(x, y, z)\,dv.$$

3 (аддитивность). *Если V — объединение двух тел V_1 и V_2 без общих внутренних точек и $f(x, y, z)$ интегрируема по V_1 и по V_2, то $f(x, y, z)$ интегрируема по V и*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \iiint\limits_{V_1} f(x, y, z)\,dv + \iiint\limits_{V_2} f(x, y, z)\,dv.$$

4 (монотонность). *Если $f_1(x, y, z) \geqslant f_2(x, y, z)$ и обе эти функции интегрируемы по V, то*

$$\iiint\limits_V f_1(x, y, z)\,dv \geqslant \iiint\limits_V f_2(x, y, z)\,dv.$$

5 (оценка интеграла по модулю). *Если $f(x, y, z)$ интегрируема по V, то $|f(x, y, z)|$ также интегрируема и*

$$\left|\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv\right| \leqslant \iiint\limits_V |f(x, y, z)|\,dv.$$

---

*) И кубируемой. Условие кубируемости мы в дальнейшем всегда будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз особо.

6 (теорема о среднем). *Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема по V и удовлетворяет неравенствам $m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M$, то*

$$mv \leqslant \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv \leqslant Mv,$$

где v — объем тела V.

Для непрерывных функций теорема о среднем может быть сформулирована так:

6'. *Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна, а V — связная замкнутая ограниченная область, то в области V найдется такая точка (ξ, η, ζ), что*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv = f(\xi, \eta, \zeta)\, v.$$

5. Тройной интеграл как аддитивная функция области. Аналогично функциям области на плоскости можно ввести понятие *функции пространственной области* *). Примером такой функции (определяемой на всех кубируемых телах) может служить объем области. Далее, если пространство (или некоторая его часть) заполнено материей, то, ставя в соответствие каждой области ту массу, которая находится внутри этой области, мы опять-таки получим некоторую функцию области в пространстве. Объем и масса обладают уже знакомым нам свойством аддитивности, которое формулируется здесь точно так же, как и для плоского случая: функция области $F(V)$ называется *аддитивной*, если для любых двух областей V_1 и V_2, для которых $F(V)$ определена и которые не имеют общих внутренних точек, $F(V_1 + V_2)$ определена и

$$F(V_1 + V_2) = F(V_1) + F(V_2).$$

Если $f(x, y, z)$ — интегрируемая функция, то тройной интеграл

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv,$$

рассматриваемый как функция области интегрирования, представляет собой аддитивную функцию области (свойство 3 п. 4).

Аналогично двумерному случаю вводится понятие производной аддитивной функции области в пространстве по объему, а именно: число A мы назовем пределом отношения

$$\frac{F(V)}{v}$$

*) Термин «область» мы здесь употребляем как синоним термина «кубируемое тело».

(где v — объем области V) при стягивании V к точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\left|\frac{F(V)}{v} - A\right| < \varepsilon$$

для всякой области V, целиком помещающейся в шаре радиуса δ, с центром в точке M_0. Этот предел называется *производной функции $F(V)$ по объему* в точке M_0 и обозначается

$$\lim_{V \to M_0} \frac{F(V)}{v}, \quad \text{или} \quad \frac{dF}{dv}.$$

Если $F(V)$ — масса, содержащаяся в области V, то ее производная по объему (если она существует) представляет собой плотность $\rho(x, y, z)$ пространственного распределения масс.

Из теоремы о среднем для тройного интеграла и из непрерывности подынтегральной функции сразу вытекает, что производная интеграла от непрерывной функции по объему существует и совпадает с подынтегральной функцией

$$\frac{d}{dv} \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv = f(x, y, z),$$

причем этот интеграл представляет собой единственную аддитивную функцию области в пространстве, производная которой по объему есть заданная непрерывная функция $f(x, y, z)$.

§ 2. Некоторые применения тройных интегралов в физике и геометрии

Рассмотрим некоторые типичные задачи, связанные с вычислением тройных интегралов.

1. Вычисление объемов. Если V — кубируемое тело, то тройной интеграл

$$\iiint\limits_V dx\, dy\, dz \tag{2.2}$$

равен объему этого тела. Действительно, этому объему равна каждая из интегральных сумм, отвечающих интегралу (2.2). Тройные интегралы в некоторых случаях бывают удобнее для вычисления объемов, чем двойные, так как с их помощью можно записать сразу объем не только криволинейного цилиндра, но и любого кубируемого тела.

2. Нахождение массы тела по плотности. Если дано некоторое тело с объемной плотностью $\rho(x, y, z)$, представляющей собой непрерывную функцию, то тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$