(где v — объем области V) при стягивании V к точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\left| \frac{F(V)}{v} - A \right| < \varepsilon$$

для всякой области V, целиком помещающейся в шаре радиуса δ, с центром в точке M_0. Этот предел называется *производной функции $F(V)$ по объему* в точке M_0 и обозначается

$$\lim_{V \to M_0} \frac{F(V)}{v}, \quad \text{или} \quad \frac{dF}{dv}.$$

Если $F(V)$ — масса, содержащаяся в области V, то ее производная по объему (если она существует) представляет собой плотность $\rho(x, y, z)$ пространственного распределения масс.

Из теоремы о среднем для тройного интеграла и из непрерывности подынтегральной функции сразу вытекает, что производная интеграла от непрерывной функции по объему существует и совпадает с подынтегральной функцией

$$\frac{d}{dv} \iiint_V f(x, y, z)\, dv = f(x, y, z),$$

причем этот интеграл представляет собой единственную аддитивную функцию области в пространстве, производная которой по объему есть заданная непрерывная функция $f(x, y, z)$.

§ 2. Некоторые применения тройных интегралов в физике и геометрии

Рассмотрим некоторые типичные задачи, связанные с вычислением тройных интегралов.

1. Вычисление объемов. Если V — кубируемое тело, то тройной интеграл

$$\iiint_V dx\, dy\, dz \tag{2.2}$$

равен объему этого тела. Действительно, этому объему равна каждая из интегральных сумм, отвечающих интегралу (2.2). Тройные интегралы в некоторых случаях бывают удобнее для вычисления объемов, чем двойные, так как с их помощью можно записать сразу объем не только криволинейного цилиндра, но и любого кубируемого тела.

2. Нахождение массы тела по плотности. Если дано некоторое тело с объемной плотностью $\rho(x, y, z)$, представляющей собой непрерывную функцию, то тройной интеграл

$$\iiint_V \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

взятый по всему объему, занимаемому этим телом, представляет собой массу данного тела. Вывод здесь вполне аналогичен выводу формулы для нахождения массы пластинки по ее плотности.

3. Момент инерции. Проводя обычный предельный переход от системы материальных точек к непрерывно распределенной массе, легко получить следующие выражения для моментов инерции относительно координатных осей тела с объемной плотностью $\rho(x, y, z)$:

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Момент инерции относительно начала координат выражается формулой

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

4. Вычисление координат центра масс. Координаты центра масс некоторого тела, имеющего объемную плотность $\rho(x, y, z)$, выражаются формулами:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}; \quad y_c = \frac{\iiint\limits_V y\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz},$$

которые получаются с помощью тех же рассуждений, что и в случае двух измерений. В частности, если рассматриваемое тело однородно, т. е. $\rho(x, y, z) = \mathrm{const}$, то выражения для координат центра масс принимают более простой вид:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\,dv}{\iiint\limits_V dv}; \quad y_c = \frac{\iiint\limits_V y\,dv}{\iiint\limits_V dv}; \quad z_c = \frac{\iiint\limits_V z\,dv}{\iiint\limits_V dv}.$$

5. Притяжение материальной точки телом. Пусть даны тело, заполняющее область V и имеющее плотность $\rho(x, y, z)$, и материальная точка (лежащая вне V) с координатами (x_0, y_0, z_0) и массой m. Найдем силу, с которой материальная точка притягивается телом. Рассмотрим элемент объема тела dv. Масса этого элемента равна $\rho(x, y, z)\,dv$, а сила, с которой он притягивает материальную точку, равна по величине

$$\gamma \frac{m\rho(x, y, z)\,dv}{r^2},$$

где γ — постоянная тяготения (зависящая от выбора единиц) и

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

а направление ее совпадает с направлением вектора $\mathbf{r}$, соединяющего точки (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z). Рассмотрим компоненту этой силы вдоль оси x. Эта компонента равна

$$\gamma \frac{(x-x_0)\,m\rho(x, y, z)\,dv}{r^3} \tag{2.3}$$

$\left(\text{поскольку косинус угла между осью } x \text{ и вектором } \mathbf{r} \text{ равен } \frac{x-x_0}{r}\right)$. Для того чтобы получить проекцию F_x на ось x силы, с которой притягивает материальную точку все тело, нужно просуммировать элементы (2.3), т. е. взять тройной интеграл.

Итак,

$$F_x = \iiint\limits_V \frac{\gamma m\rho(x, y, z)(x-x_0)}{r^3}\,dv.$$

Аналогично получаются и две другие компоненты:

$$F_y = \iiint\limits_V \frac{\gamma m\rho(x, y, z)(y-y_0)}{r^3}\,dv;$$

$$F_z = \iiint\limits_V \frac{\gamma m\rho(x, y, z)(z-z_0)}{r^3}\,dv.$$

Замечание. Следует подчеркнуть, что в рассматриваемых здесь задачах о нахождении координат центра масс, моментов инерции и т. д., равно как и в аналогичных задачах, о которых шла речь в § 4 предыдущей главы, полученные нами формулы представляют собой, собственно говоря, определения соответствующих понятий (центра масс, моментов инерции и пр.) для случая непрерывного распределения масс. Оправданием этих определений служат, в конечном счете, не логические рассуждения, а совпадение результатов экспериментов с расчетами, основанными на этих определениях.