§ 3. Вычисление тройного интеграла

Как и в случае двойных интегралов, основной прием, на котором базируется вычисление тройных интегралов, состоит в сведении интеграла к п о в т о р н о м у, т. е. к замене интегрирования по объему интегрированием по каждой из переменных в отдельности *).

Задачу о сведении тройного интеграла к повторному мы рассмотрим сначала для случая, когда интеграл берется по некоторому параллелепипеду со сторонами, параллельными осям координат.

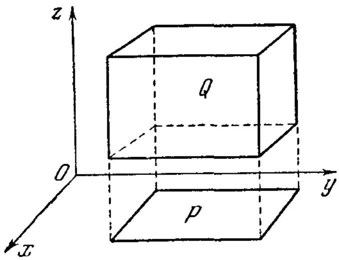

Рис. 2.1.

1. Сведение тройного интеграла по параллелепипеду к повторному. Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint\limits_Q f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

в котором область интегрирования Q представляет собой прямоугольный параллелепипед:

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d, \quad k \leqslant z \leqslant l$$

(рис. 2.1), проектирующийся на плоскость xy в прямоугольник P, определяемый неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d.$$

Имеет место следующая

Теорема 2.5. *Если для функции $f(x, y, z)$ существует тройной интеграл*

$$\iiint\limits_Q f(x, y, z)\,dv$$

и если для каждой фиксированной точки (x, y) из P существует интеграл

$$I(x, y) = \int\limits_k^l f(x, y, z)\,dz,$$

то повторный интеграл

$$\iint\limits_P dx\,dy \int\limits_k^l f(x, y, z)\,dz$$

---

*) Здесь мы имеем в виду точное вычисление интеграла. Для приближенного вычисления кратных интегралов сведение их к повторным, как правило, не применяется.

существует и имеет место равенство

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dv = \iint_P dx\,dy \int_k^l f(x, y, z)\,dz. \qquad (2.4)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы о сведении двойного интеграла к повторному (см. теорему 1.5). Оно сводится к установлению того факта, что любая интегральная сумма, отвечающая при некотором разбиении интегралу $\iint_P I(x, y)\,dx\,dy$, заключена между нижней и верхней суммами Дарбу, отвечающими тройному интегралу $\iiint_Q f(x, y, z)\,dv$.

Предположив, что интеграл

$$J(x) = \int_c^d I(x, y)\,dy$$

(при любом фиксированном x, $a \leqslant x \leqslant b$) также существует, мы можем в формуле (2.4) интегрирование по прямоугольнику P заменить повторным интегрированием, сначала по y, а потом по x. Сделав это, мы можем переписать равенство (2.4) в следующем виде:

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dv = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x, y, z)\,dz. \qquad (2.5)$$

Это и есть формула, сводящая вычисление тройного интеграла по параллелепипеду Q к последовательному интегрированию по каждой из трех переменных в отдельности. В формуле (2.5) интеграл справа берется сначала по z, потом по y и, наконец, по x. Мы могли бы, предположив существование интегралов

$$I_1(y, z) = \int_a^b f(x, y, z)\,dx \quad \text{и} \quad J_1(z) = \int_c^d I_1(y, z)\,dy,$$

получить аналогичную формулу

$$\iiint_Q f(x, y, z)\,dv = \int_k^l dz \int_c^d dy \int_a^b f(x, y, z)\,dx,$$

а также (опять-таки при условии существования соответствующих однократных и двойных интегралов) и другие аналогичные формулы, сводящие тройной интеграл к повторному, взятому по x, y и z в той или иной последовательности. В частности, если $f(x, y, z)$ непрерывна, то как тройной, так и все возможные двойные и однократные интегралы от этой функции существуют, поэтому при вычислении тройного интеграла от непрерывной функции можно интегрировать по переменным x, y и z в любой последовательности.

2. Сведение тройного интеграла по криволинейной области к повторному. Рассмотрим теперь криволинейную область V, которая снизу и сверху ограничена поверхностями

$$z = z_1(x, y) \quad \text{и} \quad z = z_2(x, y),$$

а сбоку — некоторой цилиндрической поверхностью, и пусть G — проекция области V на плоскость xy (рис. 2.2). Будем такую область кратко называть «цилиндрической по z». Пусть в области V задана функция $f(x, y, z)$, интегрируемая в этой области и такая, что для любой фиксированной точки (x, y) из G существует однократный интеграл

$$\int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.$$

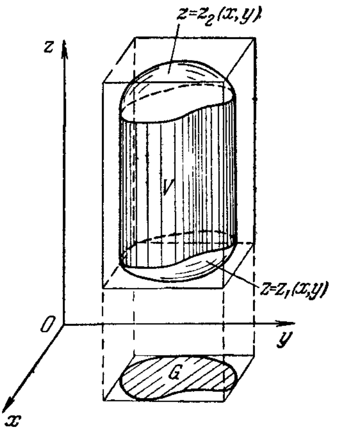

Рис. 2.2.

Заключим область V в некоторый параллелепипед Q:

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d, \quad k \leqslant z \leqslant l,$$

и определим на Q вспомогательную функцию $f^*(x, y, z)$, положив

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{в } V, \\ 0 & \text{вне } V. \end{cases}$$

Ясно, что $f^*(x, y, z)$ интегрируема по Q и что

$$\iiint\limits_Q f^*(x, y, z)\,dv \equiv \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv. \tag{2.6}$$

Применив к $f^*(x, y, z)$ формулу (2.4), получим

$$\iiint\limits_Q f^*(x, y, z)\,dv = \iint\limits_P dx\,dy \int\limits_k^l f^*(x, y, z)\,dz, \tag{2.7}$$

где P — проекция Q на плоскость xy.

В силу того, что $f^*(x, y, z)$ равна нулю вне V, имеем

$$\int\limits_k^l f^*(x, y, z)\,dz = \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{2.8}$$

Этот интеграл представляет собой функцию от x и y, равную, очевидно, нулю вне области G. Поэтому двойной интеграл от нее, взятый по P — проекции параллелепипеда Q на плоскость xy, — совпадает с интегралом от нее же, взятым по G. Таким образом, учитывая (2.6) и (2.8), равенство (2.7) можно переписать в следующем виде:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_G dx\,dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (2.9)$$

Итак, мы получили следующий результат:

Теорема 2.6. *Если для функции $f(x, y, z)$, заданной в области V, цилиндрической по z, существует тройной интеграл*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv,$$

а для каждой фиксированной точки (x, y), принадлежащей проекции G области V на плоскость xy, существует интеграл

$$I(x, y) = \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz,$$

то повторный интеграл

$$\iint\limits_G dx\,dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz$$

существует и имеет место равенство (2.9).

Выражение

$$I(x, y) = \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz$$

представляет собой функцию двух переменных. Если для этой функции и той области G, по которой она интегрируется, выполнены условия теоремы 1.6, то двойной интеграл

$$\iint\limits_G I(x, y)\,dx\,dy$$

можно в свою очередь представить в виде повторного, взятого, скажем, сначала по y, а потом по x. В результате получаем равенство

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (2.10)$$

Это и есть окончательная формула, сводящая тройной интеграл к повторному. Ясно, что мы могли бы поменять ролями переменные x,

y и z и свести тройной интеграл к повторному, взятому в каком-нибудь ином порядке, например, сначала по x, потом по y и, наконец, по z. При этом всегда пределы интегрирования по какому-либо переменному зависят от тех координат, по которым мы еще не интегрировали.

При выводе формулы (2.9) мы пользовались тем, что каждая прямая, параллельная оси z, встречает границу области V не более чем в двух точках. Если область имеет более сложный вид, то для сведения взятого по ней тройного интеграла к повторному нужно эту область предварительно разбить на такие части, к каждой из которых формула (2.9) применима. С аналогичным положением дел мы уже встречались в случае двойных интегралов.

Подводя итог сказанному выше, сформулируем кратко «рецепт» сведения тройного интеграла к повторному (для определенности будем считать, что повторный интеграл берется сначала по z, а потом по остальным переменным).

1. Область, по которой берется тройной интеграл, следует разбить на такие части, чтобы граница каждой из этих частей пересекалась любой вертикальной прямой не более чем дважды. Ниже будем рассматривать только одну такую часть.

2. Зафиксируем x и y, т. е. рассмотрим некоторую прямую, параллельную оси z. Пусть $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — точки пересечения этой прямой с границей области интегрирования; $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ являются пределами для интегрирования по z.

3. После интегрирования по z мы получаем функцию двух переменных x и y; ее область определения — это проекция пространственной области V на плоскость xy. Двойной интеграл от этой функции двух переменных заменяется повторным так, как это было описано в § 5 гл. 1.

По существу, формула сведения тройного интеграла к повторному основана на той же самой «группировке слагаемых», с которой мы уже имели дело. Вместо того чтобы суммировать элементы $f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ в каком-то произвольном порядке $\left(\text{т. е. брать } \iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz\right)$, мы сначала собираем все слагаемые, отвечающие одному столбику над точкой (x, y) $\left(\text{т. е. берем } \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dx\right)$, затем собираем вместе все столбики, лежащие в сечении области V плоскостью $x = \text{const}$ $\left(\text{т. е. вычисляем } \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right)$, и, наконец, собираем вместе все такие сечения (т. е. получаем формулу

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\Bigg).$$

Пример. Тройной интеграл, взятый по шару

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2,$$

записать в виде повторного.

Ответ.

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2} f(x, y, z)\,dv = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\,dz.$$

§ 4. Замена переменных в тройном интеграле

Мы уже встречались с заменой переменных в двойном интеграле (§ 6 гл. 1) и в однократном (вып. 1, гл. 6, § 2). Здесь мы рассмотрим вопрос о замене переменных в тройном интеграле. Содержание этого параграфа во многом аналогично § 6 гл. 1.

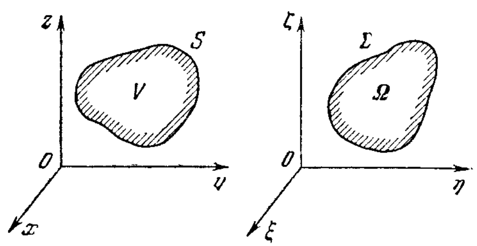

Рис. 2.3.

1. Отображение пространственных областей. Рассмотрим два экземпляра трехмерного пространства. Пусть в одном из них введены координаты x, y, z, а в другом — координаты ξ, η, ζ. Пусть, далее, V и Ω — две области в этих пространствах, ограниченные кусочно-гладкими поверхностями S и Σ соответственно (рис. 2.3). Предположим, что между точками этих областей установлено взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие. Это соответствие может быть записано с помощью трех функций

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \tag{2.11}$$

или с помощью обратных функций

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z). \tag{2.12}$$

Предположим, что функции (2.11) и (2.12) не только непрерывны, но и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Тогда якобианы

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \quad \text{и} \quad \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)}$$