(т. е. получаем формулу

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz\Bigg).$$

Пример. Тройной интеграл, взятый по шару

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2,$$

записать в виде повторного.

Ответ.

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2} f(x, y, z)\,dv = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\,dz.$$

§ 4. Замена переменных в тройном интеграле

Мы уже встречались с заменой переменных в двойном интеграле (§ 6 гл. 1) и в однократном (вып. 1, гл. 6, § 2). Здесь мы рассмотрим вопрос о замене переменных в тройном интеграле. Содержание этого параграфа во многом аналогично § 6 гл. 1.

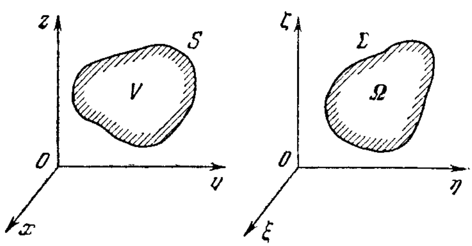

Рис. 2.3.

1. Отображение пространственных областей. Рассмотрим два экземпляра трехмерного пространства. Пусть в одном из них введены координаты x, y, z, а в другом — координаты ξ, η, ζ. Пусть, далее, V и Ω — две области в этих пространствах, ограниченные кусочно-гладкими поверхностями S и Σ соответственно (рис. 2.3). Предположим, что между точками этих областей установлено взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие. Это соответствие может быть записано с помощью трех функций

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \tag{2.11}$$

или с помощью обратных функций

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z). \tag{2.12}$$

Предположим, что функции (2.11) и (2.12) не только непрерывны, но и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Тогда якобианы

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \quad \text{и} \quad \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)}$$

существуют и непрерывны. Мы будем предполагать, что каждый из этих якобианов отличен от нуля. При этих условиях выполняется соотношение

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)} = 1. \qquad (2.13)$$

Как и в двумерном случае, можно показать, что соответствие, определяемое формулами (2.11) и (2.12), переводит внутренние точки одной области во внутренние точки другой, а граничные точки — опять-таки в граничные.

2. Криволинейные координаты в пространстве. Отображение (2.11) переводит область Ω в V. Следовательно, задание точки (ξ, η, ζ) из Ω вполне определяет соответствующую точку (x, y, z) из V. Иначе говоря, величины ξ, η, ζ можно рассматривать как координаты (отличные, конечно, от декартовых) точек области V. Они называются *криволинейными координатами*.

Рассмотрим в Ω плоскость, определенную условием $\xi = \xi_0$, т. е. параллельную координатной плоскости $\eta\zeta$. Отображение (2.11) переводит ее в некоторую поверхность. Декартовы координаты точек этой поверхности суть *)

$$x = x(\xi_0, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi_0, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi_0, \eta, \zeta). \qquad (2.14)$$

Придавая ξ_0 различные значения, мы получим некоторое семейство поверхностей, зависящее от ξ как от параметра. Плоскости $\eta = \text{const}$ и $\zeta = \text{const}$ переходят при отображении (2.11) в два аналогичных семейства поверхностей в области V. Эти три семейства поверхностей называются *координатными*. Через каждую точку области V проходит по одной поверхности каждого из трех семейств (при условии взаимной однозначности отображения (2.11)).

3. Цилиндрические и сферические координаты. Рассмотрим две наиболее употребительные системы криволинейных координат в пространстве — *цилиндрические* и *сферические* координаты.

а) *Цилиндрические координаты.* Определим положение точки M в пространстве ее декартовой координатой z и полярными координатами r, φ ее проекции M_1 на плоскость xy (рис. 2.4). Величины r, φ, z называются *цилиндрическими координатами* точки M. Непосредственно из чертежа видно, что они связаны с декартовыми координатами точки M следующими соотношениями:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \qquad (2.15)$$

*) Выражения (2.14) представляют собой так называемые параметрические уравнения поверхности. Подробнее о параметрических уравнениях поверхности будет сказано в гл. 3.

Цилиндрическим координатам отвечают следующие три семейства координатных поверхностей:

α) цилиндры $r = \text{const}$ $(0 \leqslant r < \infty)$,

β) вертикальные полуплоскости $\varphi = \text{const}$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$,

γ) горизонтальные плоскости $z = \text{const}$ $(-\infty < z < \infty)$.

Якобиан, соответствующий переходу от декартовых координат к цилиндрическим, равен

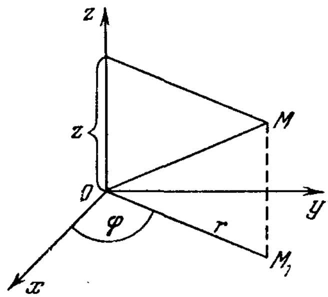

Рис. 2.4.

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \tag{2.16}$$

Формулы (2.15), устанавливающие связь между декартовыми и цилиндрическими координатами, определяют отображение области

$$0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty \tag{2.17}$$

пространства переменных (r, φ, z) на все пространство (x, y, z). При этом каждой точке $(0, 0, z_0)$ отвечает в области, определенной неравенствами (2.17), целый полусегмент

$$r = 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad z = z_0.$$

Таким образом, в точках, лежащих на оси z, наше отображение не является взаимно однозначным. Во всех остальных точках пространства (x, y, z) рассматриваемое соответствие будет, очевидно, взаимно однозначным.

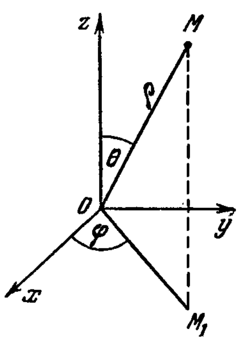

Рис. 2.5.

б) *Сферические координаты*. Определим положение точки M в пространстве следующими тремя величинами:

α) расстояние ρ от начала координат O до M,

β) угол θ между отрезком OM и положительным направлением оси z,

γ) угол φ между проекцией OM_1 отрезка OM на плоскость xy и положительным направлением оси x (рис. 2.5). Величины ρ, θ и φ называются *сферическими координатами* точки M. Из чертежа видно, что декартовы координаты точки M связаны с ее сферическими координатами следующими соотношениями:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta. \tag{2.18}$$

Сферическим координатам отвечают следующие три семейства координатных поверхностей:

α) сферы $\rho=\text{const}$ $(0\leqslant\rho<\infty)$,

β) полуконусы $\theta=\text{const}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,

γ) вертикальные полуплоскости $\varphi=\text{const}$ $(0\leqslant\varphi<2\pi)$.

Якобиан, соответствующий переходу от декартовых координат к сферическим, равен

$$\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}=\rho^2\sin\theta. \qquad (2.19)$$

Формулы (2.18) определяют отображение области (полубесконечный брус)

$$0\leqslant\rho<\infty,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi$$

пространства (ρ, θ, φ) на все пространство (x, y, z). Это отображение, как и отображение, отвечающее цилиндрическим координатам, взаимно однозначно во всех точках пространства (x, y, z), кроме точек, лежащих на оси z. Каждой точке $(0, 0, z_0)$ отвечает полусегмент $\rho=z_0$, $\theta=0$ (или $\theta=\pi$, если $z_0<0$), $0\leqslant\varphi<2\pi$, а точке $(0, 0, 0)$ отвечает прямоугольник $\rho=0$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$.

4. Элемент объема в криволинейных координатах. Найдем теперь выражение элемента объема в криволинейных координатах. Рассмотрим снова некоторую пространственную область V, в которой введены криволинейные координаты ξ, η, ζ, связанные с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x=x(\xi, \eta, \zeta),\quad y=y(\xi, \eta, \zeta),\quad z=z(\xi, \eta, \zeta). \qquad (2.20)$$

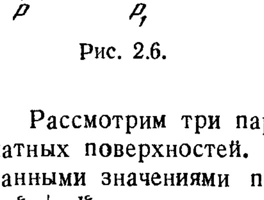

Рис. 2.6.

Функции $x(\xi, \eta, \zeta)$, $y(\xi, \eta, \zeta)$ и $z(\xi, \eta, \zeta)$ мы предполагаем непрерывными и имеющими непрерывные производные, а якобиан $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ считаем отличным от нуля.

Рассмотрим три пары бесконечно близких между собой координатных поверхностей. Пусть первая из этих пар задается фиксированными значениями первой координаты, равными соответственно ξ и $\xi+d\xi$, вторая — значениями η и $\eta+d\eta$ второй координаты и третья — значениями ζ и $\zeta+d\zeta$ третьей координаты. Эти три пары поверхностей вырезают в пространстве бесконечно малый криволинейный параллелепипед. Найдем его объем dv, пренебрегая величинами выше первого порядка малости по сравнению с этим объемом. С точностью до бесконечно малых высшего порядка этот параллелепипед совпадает с прямолинейным параллелепипедом, ребрами которого служат векторы $\overline{PP_1}$, $\overline{PP_2}$ и $\overline{PP_3}$ (рис. 2.6). Легко проверить, что эти векторы имеют следующие координаты (мы опять здесь ограничиваемся главными членами)

$$\overline{PP_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi, \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi\right),$$
$$\overline{PP_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta\right),$$
$$\overline{PP_3} = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta, \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta\right).$$

Как известно, объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, равен абсолютной величине детерминанта, составленного из координат этих векторов. Следовательно,

$$dv = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где знак плюс или минус берется так, чтобы все выражение было положительно. Итак, мы получим, что

$$dv = |J(\xi, \eta, \zeta)|\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{2.21}$$

где $J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ — якобиан преобразования (2.20).

5. Замена переменных в тройном интеграле. Геометрический смысл якобиана. Мы показали, что объем бесконечно малого элемента выражается в криволинейных координатах формулой (2.21). Из нее сразу следует, что объем конечной области V записывается в виде тройного интеграла *)

$$\iiint\limits_{\Omega} |J(\xi, \eta, \zeta)|\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{2.22}$$

взятого по той области Ω изменения переменных ξ, η, ζ, которая переводится в область V отображением (2.20).

Из этого выражения для объема формула замены переменных получается с помощью следующих рассуждений, аналогичных изложенным в п. 6 § 6 гл. 1.

---

*) Мы опустили здесь те оценки, которые в § 6 гл. 1 были проведены для двух переменных.

Читатель, разобравший доказательство теоремы 1.7, легко воспроизведет аналогичное доказательство и для данного случая. Здесь, как и в случае двух переменных, основная идея состоит в аппроксимации нелинейного отображения малой области подходящим ее линейным отображением.

Пусть $f(x, y, z)$ — непрерывная функция, заданная в замкнутой ограниченной области V. При этих предположениях интеграл

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{2.23}$$

существует. Он представляет собой предел интегральных сумм вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta v_i. \tag{2.24}$$

Пусть формулы (2.20) устанавливают соответствие между областью V и некоторой областью Ω изменения переменных ξ, η, ζ, причем это соответствие удовлетворяет условиям, указанным в п. 1. В силу этого соответствия, каждому разбиению $\{V_i\}$ области V на части отвечает определенное разбиение $\{\Omega_i\}$ области Ω, и обратно. Согласно (2.22) можно объем Δv_i области V_i представить в виде

$$\Delta v_i = \iiint\limits_{\Omega_i} |J(\xi, \eta, \zeta)|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Применив к этому интегралу теорему о среднем, получим

$$\Delta v_i = \left|J\left(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*\right)\right| \Delta\omega_i,$$

где $\Delta\omega_i$ — объем частичной области Ω_i, а $\left(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*\right)$ — некоторая точка, принадлежащая Ω_i.

В сумме (2.24) каждая из точек (x_i, y_i, z_i) выбирается внутри соответствующей области V_i произвольно. В частности, можно в качестве (x_i, y_i, z_i) взять ту точку, которая имеет криволинейные координаты ξ_i^*, η_i^*, ζ_i^*. Следовательно, интегральную сумму (2.24) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x\left(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*\right), y\left(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*\right), z\left(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*\right)\right)\left|J\left(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*\right)\right| \Delta\omega_i, \tag{2.25}$$

т. е. в виде интегральной суммы, отвечающей интегралу

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))|J(\xi, \eta, \zeta)|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \tag{2.26}$$

Этот интеграл заведомо существует, так как подынтегральная функция в нем непрерывна. Рассмотрим некоторую последовательность неограниченно измельчающихся разбиений $\{V_i\}$ области V. Ей отвечает, в силу отображения (2.20), определенная последовательность разбиений $\{\Omega_i\}$ области Ω, причем если максимум диаметров областей V_i стремится к нулю, то максимум диаметров областей Ω_i тоже стремится к нулю. Этой последовательности разбиений отвечает последовательность интегральных сумм, каждую из которых можно записать в виде (2.24) или в виде (2.25). Предел этой последовательности интегральных сумм (2.24) равен интегралу (2.23), а предел сумм (2.25) есть интеграл (2.26). Таким образом, интегралы (2.23) и (2.26) представляют собой пределы одних и тех же интегральных сумм. Следовательно, они равны, т. е.

$$\iiint_V f(x,\ y,\ z)\,dv =$$
$$= \iiint_\Omega f(x(\xi,\ \eta,\ \zeta),\ y(\xi,\ \eta,\ \zeta),\ z(\xi,\ \eta,\ \zeta))\,|J(\xi,\ \eta,\ \zeta)|\,d\omega. \qquad (2.27)$$

Итак, *если задано взаимно однозначное отображение замкнутой ограниченной области V на область Ω, непрерывное, непрерывно дифференцируемое и имеющее отличный от нуля якобиан, и если $f(x,\ y,\ z)$ — непрерывная функция, определенная в этой области V, то имеет место формула* (2.27) — *формула замены переменных в тройном интеграле.*

Нетрудно показать, что она справедлива не только для непрерывной функции f, но и для ограниченной функции, непрерывной в V всюду, кроме точек, образующих множество объема нуль.

Вернемся снова к формулам (2.20), устанавливающим соответствие между областью V изменения переменных $x,\ y,\ z$ и областью Ω изменения переменных $\xi,\ \eta,\ \zeta$. Это соответствие переводит лежащий в Ω бесконечно малый параллелепипед

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + d\xi, \quad \eta_0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0 + d\eta, \quad \zeta_0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0 + d\zeta,$$

объем которого равен $d\omega = d\xi\,d\eta\,d\zeta$, в криволинейный параллелепипед, определяемый теми же неравенствами, с объемом

$$dv = |J(\xi,\ \eta,\ \zeta)|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \qquad (2.28)$$

Следовательно, модуль якобиана $|J(\xi,\ \eta,\ \zeta)|$ — это отношение бесконечно малых объемов, отвечающих друг другу при отображении (2.20) (рис. 2.7).

В простейших случаях якобиан, отвечающий той или иной замене переменных, можно найти, пользуясь выражением (2.28) для элемента объема, из чисто геометрических соображений, не проводя вычислений. Покажем это на примерах цилиндрических и сферических координат.

Цилиндрические координаты. Рассмотрим элемент объема, заключенный между тремя парами бесконечно близких координатных поверхностей, а именно, двумя цилиндрами радиусов r и $r + dr$, двумя горизонтальными плоскостями, лежащими на уровнях z и $z + dz$, и двумя полуплоскостями, проходящими через ось z и составляющими с осью x углы φ и $\varphi + d\varphi$. Ограниченный ими элемент объема представляет собой, с точностью до малых высшего порядка, прямо-

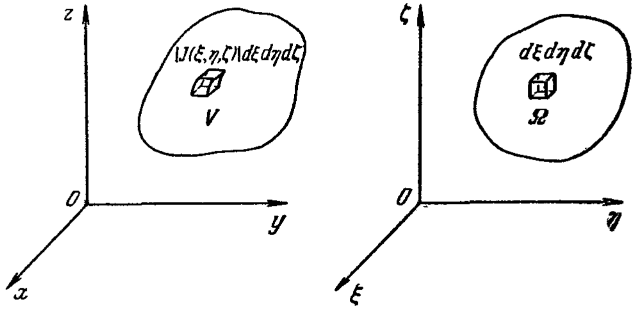

Рис. 2.7.

угольный параллелепипед с ребрами dr, dz и $r d\varphi$ (рис. 2.8). Его объем равен

$$r\,dr\,d\varphi\,dz,$$

откуда видно, что якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим равен r.

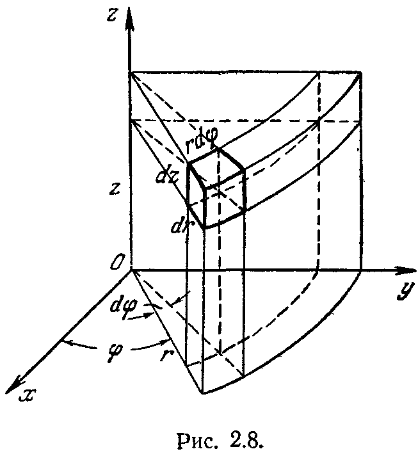

Рис. 2.8.

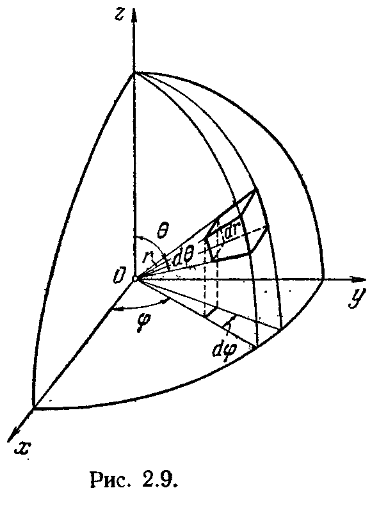

Рис. 2.9.

Сферические координаты. Рассмотрим область, ограниченную двумя сферами радиусов r и $r + dr$, двумя полуконусами, определяемыми углами θ и $\theta + d\theta$ (отсчитываемыми от оси z), и двумя полуплоскостями, составляющими углы φ и $\varphi + d\varphi$ с плоскостью xz.

Эту область можно считать прямоугольным параллелепипедом с ребрами $r\,d\theta$, dr и $r\sin\theta\,d\varphi$ (рис. 2.9). Следовательно, объем этого параллелепипеда равен

$$r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi,$$

откуда видно, что соответствующий якобиан равен

$$r^2\sin\theta.$$

§ 5. Понятие о многомерных интегралах

1. Общие сведения. Те определения и факты, которые в первой главе были изложены для двух переменных, а в этой — для трех, могут быть перенесены на случай любого числа переменных. Именно, прежде всего определяется объем n-мерного параллелепипеда.

В соответствии с известными из аналитической геометрии формулами, представляющими площадь параллелограмма и объем параллелепипеда в виде детерминантов, за объем n-мерного параллелепипеда принимается абсолютная величина детерминанта, элементами строк (или столбцов) которого служат координаты векторов, образующих ребра этого параллелепипеда. Далее, отправляясь от объема параллелепипеда, нетрудно ввести объем для многогранных n-мерных тел, а затем определить объем и для некоторого класса областей в n-мерном пространстве. После этого интеграл от функции n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вводится как предел соответствующих интегральных сумм; n-кратный интеграл от $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, взятый по некоторой n-мерной области G, обозначается символом

$$\int\int_G \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n.$$

При соответствующих условиях, налагаемых на область G и на подынтегральную функцию, n-кратный интеграл может быть записан с помощью n последовательных интегрирований по каждому переменному в отдельности, т. е. в виде

$$\int\int_G \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \int_a^b dx_1 \int_{x_2^{(1)}(x_1)}^{x_2^{(2)}(x_1)} dx_2 \ldots \int_{x_n^{(1)}(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{x_n^{(2)}(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n.$$

Формула замены переменных в n-кратном интеграле аналогична соответствующим формулам для двойных и тройных интегралов, а именно, если $x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,