Эту область можно считать прямоугольным параллелепипедом с ребрами $r\,d\theta$, dr и $r\sin\theta\,d\varphi$ (рис. 2.9). Следовательно, объем этого параллелепипеда равен

$$r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

откуда видно, что соответствующий якобиан равен

$$r^2 \sin\theta.$$

§ 5. Понятие о многомерных интегралах

1. Общие сведения. Те определения и факты, которые в первой главе были изложены для двух переменных, а в этой — для трех, могут быть перенесены на случай любого числа переменных. Именно, прежде всего определяется объем n-мерного параллелепипеда.

В соответствии с известными из аналитической геометрии формулами, представляющими площадь параллелограмма и объем параллелепипеда в виде детерминантов, за объем n-мерного параллелепипеда принимается абсолютная величина детерминанта, элементами строк (или столбцов) которого служат координаты векторов, образующих ребра этого параллелепипеда. Далее, отправляясь от объема параллелепипеда, нетрудно ввести объем для многогранных n-мерных тел, а затем определить объем и для некоторого класса областей в n-мерном пространстве. После этого интеграл от функции n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вводится как предел соответствующих интегральных сумм; n-кратный интеграл от $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, взятый по некоторой n-мерной области G, обозначается символом

$$\int\int\limits_{G} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

При соответствующих условиях, налагаемых на область G и на подынтегральную функцию, n-кратный интеграл может быть записан с помощью n последовательных интегрирований по каждому переменному в отдельности, т. е. в виде

$$\int\int\limits_{G} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{x_2^{(1)}(x_1)}^{x_2^{(2)}(x_1)} dx_2 \ldots \int\limits_{x_n^{(1)}(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{x_n^{(2)}(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n.$$

Формула замены переменных в n-кратном интеграле аналогична соответствующим формулам для двойных и тройных интегралов, а именно, если $x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\int \underset{G}{\cdots} \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int \underset{\Gamma}{\cdots} \int f(x_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n)) \times$$

$$\times \left| \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} \right| dy_1 \ldots dy_n,$$

где Γ — область изменения переменных $y_1, \ldots, y_n$.

2. Примеры. Для n-кратных интегралов остаются в силе все основные факты, изложенные выше для двойных и тройных интегралов. Не останавливаясь на общих вопросах теории n-кратных интегралов, рассмотрим некоторые простейшие примеры.

1) *Взаимное притяжение двух материальных тел.* Хотя реальное физическое пространство, в котором мы живем, имеет только три измерения, существуют разнообразные конкретные задачи, в которых приходится рассматривать интегралы кратности большей трех. В качестве простейшего примера такого рода укажем формулу для силы взаимного притяжения двух материальных тел конечных размеров. Пусть одно из этих тел занимает некоторую область G и имеет объемную плотность $\rho(x, y, z)$, а другое занимает область G' и имеет объемную плотность $\rho'(x', y', z')$ (нам удобно обозначить декартовы координаты точек одного и другого тела разными символами). По закону Ньютона направленная по оси x компонента dF_x силы притяжения, действующей между двумя бесконечно малыми элементами

$$dv = dx\, dy\, dz \quad \text{и} \quad dv' = dx'\, dy'\, dz'$$

объемов этих двух тел, равна

$$\gamma \frac{\rho(x, y, z)\, \rho'(x', y', z')}{r^3} (x - x')\, dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz', \qquad (2.29)$$

где γ — постоянная и

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Для того чтобы получить полную величину компоненты F_x силы взаимодействия между рассматриваемыми телами, нужно просуммировать выражения (2.29) по всем элементам объема обоих тел. Иначе говоря, компонента F_x силы взаимного притяжения тел, заполняющих области G и G', равна

$$\gamma \int\int\underset{G \times G'}{\int\int}\int\int \frac{\rho(x, y, z)\, \rho'(x', y', z')}{r^3} (x - x')\, dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz'. \qquad (2.30)$$

Аналогично записываются и две остальные компоненты. При этом точка (x, y, z) пробегает всю область G, а точка (x', y', z') независимо пробегает всю область G'. Таким образом, интеграл (2.30) берется по области в шестимерном пространстве, которую естественно обозначить $G \times G'$ и назвать «произведением» областей G и G'.

2) Рассмотрим интеграл

$$I_n = \int\int_G \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \tag{2.31}$$

взятый по области G, определяемой неравенствами

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant 1.$$

Сводя интеграл (2.31) к повторному, получаем

$$I_n = \int\int_G \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{1-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1}} dx_n.$$

Выполнив интегрирование по x_n и подставив пределы, получим

$$I_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-2}} (1 - x_1 - \ldots - x_{n-1})\, dx_{n-1}.$$

Далее, проинтегрировав по x_{n-1} и подставив пределы, будем иметь

$$I_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-3}} \frac{(1 - x_1 - \ldots - x_{n-2})^2}{2!}\, dx_{n-2}.$$

Продолжая последовательно интегрирование, окончательно получим

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx_1 = \frac{1}{n!}.$$

3) *Объем n-мерного шара.* n-мерный шар радиуса a с центром в начале координат — это совокупность тех точек n-мерного пространства, координаты которых удовлетворяют условию

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant a^2.$$

Объем V_n такого шара — это интеграл

$$\int\int_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant a^2} \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Вычислить этот интеграл можно следующим образом. Положив $x_i = ay_i$, получим

$$V_n = a^n U_n,$$

где U_n — объем шара радиуса 1. Далее, так как

$$U_n = \int\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant 1} \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx_n \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 \leqslant 1-x_n^2} \ldots \int dx_1 \ldots dx_{n-1} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 \leqslant 1} \ldots \int dx_1 \ldots dx_{n-1} =$$

$$= U_{n-1} \int\limits_{-1}^{1} (1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n,$$

то, положив $x_n = \cos\theta$, получим

$$U_n = 2U_{n-1} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta. \tag{2.32}$$

Приняв во внимание, что $U_1 = 2$ (одномерный шар радиуса 1 — это отрезок $[-1, 1]$, а одномерный объем — это длина), мы можем последовательно найти U_2, U_3 и т. д. *).

*) С помощью эйлеровых интегралов (см. гл. 10, § 3, в частности пример 3) можно дать явное выражение для U_n.