ГЛАВА 3

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой главе мы применим дифференциальное и интегральное исчисления к изучению геометрических объектов — кривых и поверхностей. Исследование геометрических образов средствами анализа составляет содержание дифференциальной геометрии.

Рамки этого курса позволяют нам изложить лишь основы дифференциальной геометрии, которая представляет собой обширную науку, тесно связанную с механикой, теорией дифференциальных уравнений и другими дисциплинами.

§ 1. Вектор-функции скалярного аргумента

1. Определение вектор-функции. Предел. Непрерывность. Кривые и поверхности удобно задавать функциями, принимающими векторные значения (короче, вектор-функциями). Поэтому мы начнем главу с того, что кратко сформулируем основные понятия анализа применительно к вектор-функциям. Мы можем при этом не входить в подробности, так как нового (по сравнению со случаем скалярных функций) здесь будет немного.

Определение. *Пусть каждому значению переменной t, принадлежащему отрезку $[a, b]$, поставлен в соответствие вектор*

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}. \quad (3.1)$$

Такой вектор называется вектор-функцией скалярного аргумента t.

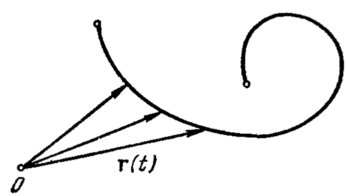

Рис. 3.1.

С вектор-функцией $\mathbf{r}(t)$ связываются следующие наглядные представления. Если откладывать от начала координат векторы $\mathbf{r}(t)$, отвечающие различным значениям аргумента t, то концы этих векторов составят некоторую кривую — график вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, обычно называемую *годографом* функции $\mathbf{r}(t)$ (рис. 3.1).

Если рассматривать аргумент t как время, то годограф функции $\mathbf{r}(t)$ — это траектория движения некоторой точки.

Постоянный вектор

$$\mathbf{R} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

называется *пределом* $\mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}| = 0, \tag{3.2}$$

где $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}|$ — длина вектора $\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}$. Это условие равносильно трем скалярным условиям:

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = b, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = c. \tag{3.2$'$}$$

Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется *непрерывной* в точке t_0, если

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна в точке t_0 тогда и только тогда, когда все три ее компоненты — скалярные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывны в точке t_0. (Докажите это!) Сумма, разность, скалярное и векторное произведения непрерывных вектор-функций непрерывны. (Проверьте это!)

2. Дифференцирование вектор-функции. Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется *дифференцируемой* в точке t, если существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Этот предел называется *производной* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ и обозначается символами $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\mathbf{r}'(t)$ или $\mathbf{r}(t)$. Легко проверить, что существование $\mathbf{r}'(t)$ равносильно существованию трех производных $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$, причем

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}.$$

Вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ направлен по секущей MM_1 годографа функции $\mathbf{r}(t)$ (рис. 3.2), а направление вектора $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — это направление предельной прямой, к которой стремится эта секущая, когда точка M_1 приближается к M, т. е. направление касательной к годографу в точке M.

Кинематически $\mathbf{r}'(t)$ — это скорость точки, движущейся по закону $\mathbf{r}(t)$.

Для вектор-функции имеют место следующие правила дифференцирования:

1) если $\mathbf{r}(t) = \mathrm{const}$, то $\mathbf{r}'(t) = 0$;

2) $(k\mathbf{r}(t))' = k\mathbf{r}'(t)$, $k = \mathrm{const}$;

3) $(u(t)\,\mathbf{r}(t))' = u'(t)\,\mathbf{r}(t) + u(t)\,\mathbf{r}'(t)$, $u(t)$ — скалярная функция;

4) $(\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) \pm \mathbf{r}_2'(t)$;

5) $(\mathbf{r}_1(t),\ \mathbf{r}_2(t))' = (\mathbf{r}_1'(t),\ \mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t),\ \mathbf{r}_2'(t))$;

6) $[\mathbf{r}_1(t),\ \mathbf{r}_2(t)]' = [\mathbf{r}_1'(t),\ \mathbf{r}_2(t)] + [\mathbf{r}_1(t),\ \mathbf{r}_2'(t)]$ (здесь необходимо сохранять порядок сомножителей);

7) *если* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и $t = t(\tau)$, *то*

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}$$

— правило дифференцирования сложной вектор-функции.

Доказательство этих правил мы предоставим читателю.

Отметим следующие частные случаи дифференцирования вектор-функции:

а) *Производная вектора постоянного направления.* Пусть вектор $\mathbf{r}(t)$ имеет постоянное направление (т. е. от t зависит лишь его длина). Тогда векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ коллинеарны. Действительно, в этом случае $\mathbf{r}(t)$ можно записать в виде

$$\mathbf{r}(t) = u(t)\,\mathbf{e},$$

где $u(t)$ — скаляр, а $\mathbf{e}$ — постоянный вектор, например единичный. Тогда $\mathbf{r}'(t) = u'(t)\,\mathbf{e}$, т. е. $\mathbf{r}'(t) = \frac{u'(t)}{u(t)}\,\mathbf{r}(t)$.

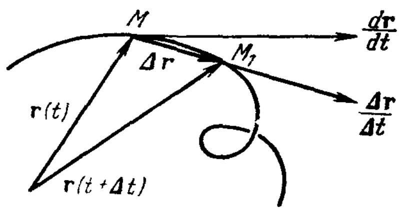

Рис. 3.2.

б) *Производная вектора постоянной длины.* Если $|\mathbf{r}(t)| = \text{const}$, то векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ взаимно ортогональны. Действительно, в этом случае $(\mathbf{r}(t),\ \mathbf{r}'(t)) = \text{const}$; дифференцируя это равенство, получаем

$$2(\mathbf{r}(t),\ \mathbf{r}'(t)) = 0, \text{ т. е. } (\mathbf{r}(t),\ \mathbf{r}'(t)) = 0,$$

что и требовалось.

Геометрический смысл этого соотношения очень прост. Если $|\mathbf{r}(t)| = R$, то годограф функции $\mathbf{r}(t)$ лежит целиком на сфере радиуса R с центром в начале координат. Касательная к такой кривой лежит в плоскости, касательной к сфере, и, следовательно, перпендикулярна радиусу-вектору $\mathbf{r}(t)$, идущему в точку касания.

Дифференциалом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ *называется вектор*

$$d\mathbf{r} = dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k}.$$

Иначе говоря,

$$d\mathbf{r} = x'(t)\,dt \cdot \mathbf{i} + y'(t)\,dt \cdot \mathbf{j} + z'(t)\,dt \cdot \mathbf{k} = \mathbf{r}'(t)\,dt,$$

т. е. дифференциал вектор-функции равен произведению ее производной на дифференциал (т. е. приращение) независимой переменной. Как и в случае скалярной функции, дифференциал $d\mathbf{r}$ вектор-функции отличается от ее приращения $\Delta\mathbf{r}$ на величину выше первого порядка малости относительно Δt.

3. Годограф. Особые точки. Мы назвали годографом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ ту кривую, которую описывает конец вектора $\mathbf{r}(t)$ при изменении t, если его начало все время находится в некоторой фиксированной точке.

Если $\mathbf{r}(t)$ — дифференцируемая вектор-функция, то вектор $\mathbf{r}'(t)$ там, где он не равен нулю, направлен, как мы видели, по касательной к годографу. Точки, в которых производная $\mathbf{r}'(t)$ не существует или существует и равна 0, называются *особыми*. Эти особые точки могут иметь различный характер. Приведем несколько примеров

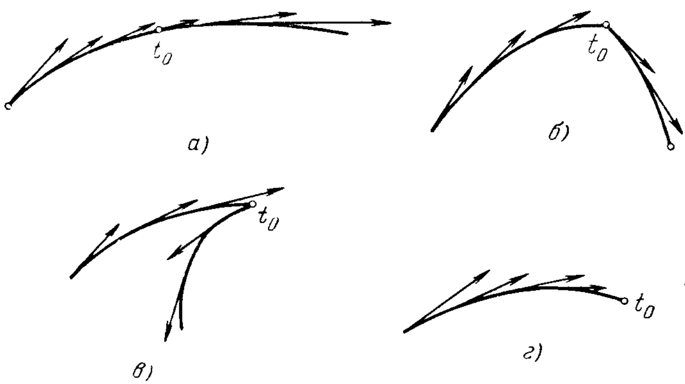

Рис. 3.3.

(рис. 3.3). При движении точки по закону $\mathbf{r}(t)$ путь может представлять собой «гладкую» кривую, однако скорость $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ при $t \to t_0$ может стремиться к нулю. Материальная точка испытывает остановку в момент $t = t_0$. Это — *особенность самого движения*, но не той геометрической кривой, по которой движется точка (рис. 3.3, *а*). В других случаях такая остановка может сопровождаться изменением направления пути (излом; см. рис. 3.3, *б*). Это — особенность как самого движения, так и соответствующей геометрической кривой. Может оказаться, что на кривой имеется излом, но скорость $\mathbf{r}'(t)$ при приближении к этой точке не стремится к нулю (рис. 3.3, *б*). Здесь точка испытывает толчок, меняющий ее скорость скачком. Далее, кривая, по которой происходит движение, может иметь точку возврата (рис. 3.3, *в*), причем скорость материальной точки вблизи этой точки также может либо стремиться к нулю, либо меняться скачком. Наконец, при $t \to t_0$ движение $\mathbf{r}(t)$ может просто «замирать» и не возобновляться при $t > t_0$. Это — «покой» в конце пути (рис. 3.3, *г*). Эти и различные другие особенности движения представляют интерес при изучении конкретных случаев; вместе с тем они затрудняют применение общих методов. Мы будем в дальнейшем такие особенности исключать и рассматривать движения, для которых $\mathbf{r}'(t)$ всюду существует и не обращается в нуль.

4. Формула Тейлора. Для вектор-функции имеет место формула Тейлора

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t)\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\mathbf{r}''(t)\,\Delta t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(\mathbf{r}^{(n)}(t) + \boldsymbol{\alpha})\,\Delta t^n, \tag{3.3}$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ — вектор, стремящийся к нулю при $\Delta t \to 0$. Действительно, применив формулу Тейлора к каждой из трех компонент *) $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ вектора $\mathbf{r}(t)$, получим

$$x(t+\Delta t) = x(t) + x'(t)\,\Delta t + \frac{1}{2}\,x''(t)\,\Delta t^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\,(x^{(n)}(t) + \alpha_1)\,\Delta t^n$$

и еще два аналогичных равенства для y и z. Умножив эти равенства соответственно на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ и сложив, получим формулу (3.3).

Мы видим, таким образом, что основные понятия и правила дифференциального исчисления легко и без существенных изменений переносятся со скалярных функций на векторные. Следует, однако, иметь в виду, *что такой перенос все же нельзя делать совершенно автоматически*. Например, известная формула конечных приращений (вып. 1, гл. 8, § 9) для вектор-функций несправедлива. (Постройте пример!)

5. Интеграл от векторной функции по скалярному аргументу. Для вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, заданной на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, как и для обычных скалярных функций, можно составить интегральные суммы и рассмотреть их предел при стремлении к нулю максимальной длины отрезков, на которые разбит отрезок $[a, b]$. Этот предел называется *интегралом* от $\mathbf{r}(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt.$$

*) Мы, разумеется, предполагаем, что компоненты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ удовлетворяют тем условиям, при которых формула Тейлора для каждой из них имеет место.

Как и для скалярных функций, можно установить, что если $\mathbf{r}(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то этот предел существует.

Легко видеть, что существование предела одной векторной интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

(здесь $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, $t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i$) равносильно существованию пределов трех скалярных интегральных сумм для трех компонент $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функции $\mathbf{r}(t)$. При этом

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{i} \cdot \int_a^b x(t)\,dt + \mathbf{j} \cdot \int_a^b y(t)\,dt + \mathbf{k} \cdot \int_a^b z(t)\,dt.$$

На интегралы от вектор-функций распространяются обычные свойства интегралов от скалярных функций. Например,

$$\int_a^b u'(t)\,\mathbf{r}(t)\,dt = u(b)\,\mathbf{r}(b) - u(a)\,\mathbf{r}(a) - \int_a^b u(t)\,\mathbf{r}'(t)\,dt$$

— формула интегрирования по частям; $u(t)$ — скалярная функция. Легко выводятся также формулы, связывающие интегрирование с основными операциями векторной алгебры. Например,

$$\int_a^b [\mathbf{c},\ \mathbf{r}(t)]\,dt = \left[\mathbf{c},\ \int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt\right],$$

где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

6. Векторные функции нескольких скалярных аргументов. Можно рассматривать векторные функции не одного, а нескольких скалярных аргументов (в частности, с вектор-функциями двух скалярных аргументов мы встретимся в этой главе при изучении поверхностей). На такие функции легко переносятся понятие частной производной и другие понятия анализа.

§ 2. Пространственные кривые

1. Векторное уравнение кривой. Вектор-функции скалярного аргумента представляют собой удобный способ задания кривых в пространстве. Действительно, если нам задана некоторая непрерывная вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, то, построив ее **годограф**, мы получим некоторую кривую γ в пространстве.