каждую точку поверхности проходит одна и только одна линия каждого из семейств $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$. Поэтому в каждой касательной плоскости возникает один и только один репер $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$; если эти векторы отличны от нуля, то они не коллинеарны, поскольку по условию кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ ни в одной точке не касаются друг друга. Опасно лишь обращение какого-либо из этих векторов в нуль. Мы будем в дальнейшем считать, что параметризация на рассматриваемом куске поверхности такова, что $\mathbf{r}_u \neq 0$ и $\mathbf{r}_v \neq 0$.

Итак, *задание параметризации u, v на поверхности порождает в каждой касательной плоскости невырожденный репер $\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_u$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_v$, т. е. некоторую аффинную систему координат.*

Выбор другой параметризации $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ порождает в несомых касательных плоскостях другой набор систем координат $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{r}_{\tilde{u}}$, $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{r}_{\tilde{v}}$, а в каждой из касательных плоскостей переход от одной параметризации к другой порождает *аффинное преобразование системы координат.*

Действительно, пусть

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$$

— выражение старых параметров u, v через новые $\tilde{u}$, $\tilde{v}$. По правилу дифференцирования сложной вектор-функции имеем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_{\tilde{u}} &= \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \\ \mathbf{r}_{\tilde{v}} &= \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

Таким образом, новый репер $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$ выражается через старый $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ по формулам

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \mathbf{e}_2, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \mathbf{e}_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.37'}$$

Аналогично выражается старый репер $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ через новый $\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2$.

§ 4. Измерение на кривой поверхности длин, углов и площадей. Первая квадратичная форма поверхности

Для решения многих физических, технических и геометрических задач нужно уметь вычислять длины дуг, лежащих на поверхности, углы между такими дугами, площади тех или иных частей поверхности. Этот круг вопросов мы и рассмотрим сейчас. Основная идея всех излагаемых в этом параграфе рассуждений состоит, по существу, в замене бесконечно малого элемента гладкой поверхности соответствующим элементом касательной плоскости. Поэтому нам полезно начать с некоторых формул и понятий, относящихся к вычислению длин, углов и площадей на плоскости.

1. Аффинная система координат на плоскости. Рассмотрим плоскость и некоторый невырожденный репер $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ на ней. Любой вектор $\mathbf{r}$, лежащий в плоскости, можно представить в виде

$$\mathbf{r} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2.$$

Запишем квадрат длины вектора $\mathbf{r}$. Имеем

$$r^2 = (\mathbf{r},\ \mathbf{r}) = \xi_1^2(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1) + 2\xi_1\xi_2(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2) + \xi_2^2(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2).$$

Введя обозначения *)

$$g_{11} = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1), \quad g_{12} = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2), \quad g_{22} = (\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2),$$

перепишем это равенство в виде

$$r^2 = g_{11}\xi_1^2 + 2g_{12}\xi_1\xi_2 + g_{22}\xi_2^2. \tag{3.38}$$

Величины g_{11}, g_{12} и g_{22} определяются выбором репера $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Легко видеть, что через эти величины (и, конечно, координаты соответствующих векторов) выражаются длины векторов, углы между векторами и площади параллелограммов, натянутых на два вектора. Действительно, выражение для длины r вектора $\mathbf{r}$ получается из (3.38). Далее, если

$$\mathbf{r} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_1\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\rho} = \eta_1\mathbf{e}_1 + \eta_2\mathbf{e}_2,$$

то

$$(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho}) = g_{11}\xi_1\eta_1 + g_{12}\xi_1\eta_2 + g_{12}\xi_2\eta_1 + g_{22}\xi_2\eta_2.$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho}) = \frac{(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho})}{|\mathbf{r}|\,|\boldsymbol{\rho}|},$$

мы можем выразить угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\rho}$ через их координаты и коэффициенты g_{ik}.

---

*) Иногда также пользуются обозначениями

$$E = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1), \quad F = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2), \quad G = (\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2).$$

Полагая еще $g_{21} = g_{12}$, совокупность величины g_{ik} $(i,\ k = 1,\ 2)$ часто записывают в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Наконец, найдем площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\rho}$. Как известно

$$S = |[\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}]|,$$

поэтому

$$S = |[\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2, \ \eta_1\mathbf{e}_1 + \eta_2\mathbf{e}_2]| = |\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1| \, |[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]|.$$

Но

$$|[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]| = |\mathbf{e}_1| \, |\mathbf{e}_2| \sin(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_1| \, |\mathbf{e}_2| \sqrt{1 - \cos^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} =$$
$$= \sqrt{e_1^2 e_2^2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)^2} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Следовательно,

$$S = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \, |\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1|.$$

Итак, знание величин g_{11}, g_{12}, g_{22} действительно позволяет вычислять на плоскости длины, углы и площади, т. е. все метрические величины.

2. Длина дуги на поверхности. Первая квадратичная форма. Пусть задана поверхность

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v).$$

Вычислим длину линии, расположенной на этой поверхности. Выбрав на этой линии за параметр длину дуги, ее уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(l), v(l)).$$

Так как вектор $\frac{d\mathbf{r}}{dl}$ имеет длину единица, то

$$dl^2 = dr^2.$$

Но

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \, du + \mathbf{r}_v \, dv,$$

следовательно,

$$dl^2 = r_u^2 \, du^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \, du \, dv + r_v^2 \, dv^2.$$

Воспользуемся обозначениями

$$g_{11} = r_u^2, \quad g_{12} = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v), \quad g_{22} = r_v^2,$$

тогда

$$dl^2 = g_{11} \, du^2 + 2g_{12} \, du \, dv + g_{22} \, dv^2. \tag{3.39}$$

Это выражение представляет собой квадратичную форму (относительно переменных du и dv), при этом, очевидно, положительно определенную *). Она называется *первой квадратичной формой*

---

*) Квадратичная форма $\sum\limits_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$ называется *положительно определенной*, если $\sum\limits_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k > 0$ для любых $\xi_1, \ldots, \xi_n$, кроме $\xi_1 = \ldots$ $\ldots = \xi_n = 0$.

поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Коэффициенты g_{11}, g_{12} и g_{22} квадратичной формы (3.39) — это, очевидно, те самые коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22}, которые отвечают реперу $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, в плоскости, касательной к нашей поверхности в рассматриваемой точке. Эти коэффициенты зависят от точки поверхности. Кроме того, они зависят, конечно, и от выбора параметризации поверхности.

Первая квадратичная форма поверхности дает выражение для длины бесконечно малого элемента дуги. Длина некоторой конечной кривой, лежащей на поверхности, получается отсюда интегрированием. Точнее, если кривая на поверхности задана уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

то ее длина равна

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

(вдоль этой кривой g_{11}, g_{12} и g_{22} представляют собой, очевидно, функции параметра t).

Примеры. 1. На плоскости задана декартова система координат, определенная взаимно ортогональными единичными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Если $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор начала этой системы координат, то радиус-вектор произвольной точки плоскости равен

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{e}_1 u + \mathbf{e}_2 v.$$

Мы получили уравнение плоскости, параметризованной декартовыми координатами u и v на ней. Для этой параметризации

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{e}_2, \quad g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1,$$

следовательно, для плоскости, параметризованной декартовыми координатами, первая квадратичная форма записывается так:

$$dl^2 = du^2 + dv^2.$$

Здесь несомое многообразие — касательная плоскость — совпадает в каждой точке с несущим многообразием (тоже плоскостью), а порождаемый в каждой из касательных плоскостей координатный репер совпадает (с точностью до параллельного переноса) с координатным репером $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ рассматриваемой плоскости.

2. Пусть на плоскости введены полярные координаты ρ и φ. Тогда радиус-вектор произвольной точки плоскости можно записать так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \rho(\mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi)$$

($\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — опять-таки единичные взаимно ортогональные векторы). Это — уравнение плоскости, параметризованной полярными координатами. Здесь

$$\mathbf{r}_\rho = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi, \quad \mathbf{r}_\varphi = \rho(-\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi)$$

и, следовательно,

$$g_{11} = (\mathbf{r}_\rho, \mathbf{r}_\rho) = 1, \quad g_{12} = (\mathbf{r}_\rho, \mathbf{r}_\varphi) = 0, \quad g_{22} = (\mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\varphi) = \rho^2,$$
$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\varphi^2.$$

3. Рассмотрим сферу радиуса a, приняв на ней за параметры долготу φ и широту θ*) (рис. 3.18). Ее уравнение в координатах φ и θ имеет вид (проверьте это!)

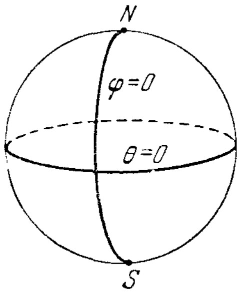

Рис. 3.18.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + a\,\{(\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi)\cos\theta + \mathbf{k}\sin\theta\}.$$

Из этого уравнения получаем

$$\mathbf{r}_\theta = -a(\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi)\sin\theta + a\mathbf{k}\cos\theta,$$
$$\mathbf{r}_\varphi = a(-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi)\cos\theta$$

и, следовательно, здесь

$$dl^2 = a^2(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2).$$

4. Если поверхность задана явным уравнением

$$z = f(x, y),$$

т. е.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k},$$

то для нее

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \mathbf{k}f'_x, \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \mathbf{k}f'_y$$

и, следовательно,

$$dl^2 = \left(1 + f_x'^2\right)dx^2 + 2f'_x f'_y\, dx\, dy + \left(1 + f_y'^2\right)dy^2.$$

Упражнение. Написать первую квадратичную форму тора в координатах φ и ψ (см. упр. в п. 3 § 3).

3. Угол между двумя кривыми. *Углом между двумя пересекающимися кривыми называется угол между их касательными в точке пересечения.* Пусть через точку на поверхности проходят две кривые и пусть смещению по одной кривой соответствуют дифференциалы координат du и dv, а смещению по другой — дифференциалы δu, δv. Векторы смещений можно записать так:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv, \quad \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,\delta u + \mathbf{r}_v\,\delta v.$$

*) Отсчитываемую от экватора.

Угол φ между ними определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{(d\mathbf{r}, \delta\mathbf{r})}{|d\mathbf{r}|\,|\delta\mathbf{r}|}.$$

В частности, угол ω между координатными линиями, т. е. между векторами $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, определяется формулой

$$\cos\omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Если $g_{12} = 0$, то координатные линии на поверхности пересекаются под прямым углом. Такая координатная сеть называется *ортогональной*. В ортогональных координатах первая квадратичная форма имеет вид

$$dl^2 = g_{11}\,du^2 + g_{22}\,dv^2.$$

4. Определение площади поверхности. Пример Шварца. Перейдем теперь к рассмотрению площади кривой поверхности. Прежде чем говорить о ее вычислении, нужно определить само понятие площади поверхности. Введем это понятие следующим образом. Пусть Σ — некоторая гладкая поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром L. Разобьем эту поверхность с помощью некоторого числа кусочно-гладких кривых на части — «элементы» Σ_i, $i = 1, \ldots, N$, — и выберем в каждой из этих частей произвольную точку M_i. Проведем через точку M_i касательную плоскость к поверхности Σ и спроектируем элемент Σ_i на эту касательную плоскость; мы получим на этой касательной плоскости некоторую квадрируемую плоскую фигуру S_i (рис. 3.19).

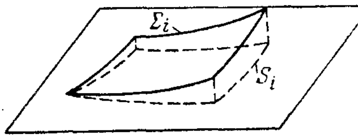

Рис. 3.19.

Определение. *Площадью поверхности* Σ *мы назовем предел* (если он существует) *сумм площадей этих проекций, взятых по всем элементам разбиения, при условии, что максимум диаметров этих элементов стремится к нулю.* Поверхность, для которой этот предел существует, называется *квадрируемой*

На первый взгляд кажется, что естественнее всего было бы определить площадь поверхности Σ как предел, к которому стремятся площади поверхностей вписанных в Σ многогранников, при условии, что максимум диаметров их граней стремится к нулю (так же как длина кривой есть предел длин вписанных в эту кривую ломаных). Однако еще в прошлом веке была обнаружена несостоятельность такого определения. Рассмотрим следующий пример, принадлежащий Шварцу.

В цилиндр радиуса R и высоты H впишем многогранник следующим образом: разделив цилиндр горизонтальными плоскостями на m равных цилиндров высоты $\frac{H}{m}$ каждый, разобьем каждую из возникающих $m+1$ окружностей (включая сюда верхнее и нижнее основания исходного цилиндра) на равные части n точками так, чтобы точки деления на каждой окружности находились над серединами дуг соседних окружностей. Возьмем теперь две соседние точки, лежащие на какой-либо окружности, и точку, лежащую непосредственно над или под серединой дуги, соединяющей эти две точки, и построим на этих трех точках треугольник (рис. 3.20). Совокупность всех таких треугольников образует многогранную поверхность, вписанную в исходный цилиндр. На вид этот многогранник похож на голенище сапога, собранное в гармошку. Его называют поэтому *сапогом Шварца* (рис. 3.21).

Если теперь и n и m неограниченно растут, то размеры каждого из треугольников, составляющих вписанный в цилиндр многогранник, стремятся

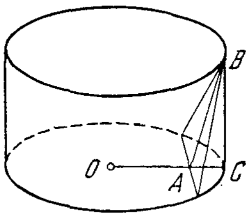

Рис. 3.20.

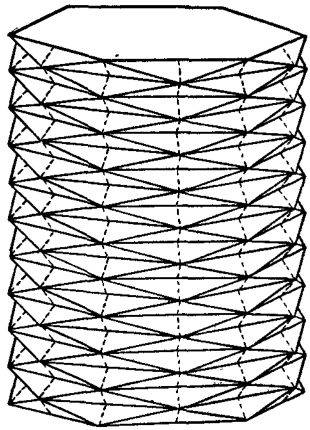

Рис. 3.21.

к нулю. При этом, однако, суммарная площадь этих треугольников вовсе не обязана стремиться к $2\pi RH$ (боковой поверхности цилиндра); в зависимости от того, как меняются n и m, она может неограниченно расти, стремиться к пределу, отличному от $2\pi RH$, или же вообще не иметь предела.

Действительно, элементарный подсчет показывает, что площадь одного треугольника (при заданных m и n) равна

$$R \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

Число таких треугольников равно, очевидно, $2nm$, поэтому сумма их площадей есть

$$\sigma_{n,m} = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{H^2 + R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}. \tag{3.40}$$

Если теперь n и m стремятся к бесконечности, причем так, что m растет быстрее, чем n^2, то выражение (3.40) неограниченно растет. Если же n и m меняются так, что отношение $\frac{m}{n^2}$ стремится к некоторому конечному пределу q, то

$$\lim_{n,\,m\to\infty} m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n,\,m\to\infty} m 2\sin^2\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi^2}{2}q,$$

и, следовательно,

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \sigma_{n,\, m} = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{\pi^4 R^2}{4} q^2}.$$

Подбирая q, мы можем получить в пределе любое число, большее или равное $2\pi RH$, т. е. любое число, большее «истинной» площади цилиндра. Истинное значение площади боковой поверхности цилиндра мы получим лишь при $q=0$, т. е. если m растет медленнее, чем n^2.

Итак, попытка определить площадь кривой поверхности с помощью вписанных многогранников оказалась неудачной даже для обыкновениого круглого цилиндра. Легко понять причину, по которой способ, пригодный для определения длины кривой, не годится для определения площади поверхности. При достаточно мелком разбиении кривой (будем считать кривую гладкой) направление хорды, соединяющей соседние точки деления, близко к направлению касательной, проведенной в любой точке соответствующей дуги. В случае поверхности это не так: многоугольная площадка сколь угодно малых размеров может опираться всеми своими вершинами на гладкую поверхность так, что угол между нормалью к площадке и поверхности будет большим. При этом, очевидно, такой плоский элемент не может служить хорошей аппроксимацией соответствующего элемента поверхности. Это как раз и наблюдается в приведенном выше примере Шварца: если $q \approx \dfrac{m}{n^2}$ велико, то треугольники, образующие вписанную поверхность, почти перпендикулярны боковой поверхности цилиндра. Образованный ими многогранник весь состоит из мелких складок. Это и служит причиной того, что площадь поверхности такого многогранника может быть много больше площади боковой поверхности цилиндра.

5. Вычисление площади гладкой поверхности. В предыдущем пункте мы ввели определение площади кривой поверхности. Установим теперь для гладкой поверхности существование площади и формулу, с помощью которой эта площадь может быть фактически вычислена.

Теорема 3.1. Пусть параметрическое уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

определяет гладкую поверхность, ограниченную кусочно-гладким контуром. Тогда эта поверхность квадрируема и ее площадь равна

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{g_{11}g_{12} - g_{12}^2}\, du\, dv, \tag{3.41}$$

где g_{11}, g_{12} и g_{22} — коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности, а D — область изменения переменных u и v.

Доказательство. Разобьем поверхность Σ на части Σ_i. Выбрав в каждой из этих частей некоторую точку M_i, проведем в ней касательную плоскость. Введем местную систему декартовых координат, выбрав за начало точку M_i, нормаль в этой точке за направление оси z, а касательную плоскость за плоскость xy. Координаты x, y

и z произвольной точки поверхности Σ_i можно записать как функции от u и v:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)\,^{*}).$$

Проекция поверхности Σ_i на касательную плоскость в точке M_i определяется уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = 0.$$

Пользуясь выражением для площади плоской фигуры в криволинейных координатах (§ 6 гл. 1), мы можем записать площадь этой проекции в виде

$$\pm \iint\limits_{D_i} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} du\, dv,$$

где D_i — та область, которую пробегают переменные u, v, когда точка (x, y, z) пробегает элемент Σ_i, а знак берется так, чтобы все выражение было положительным.

Выражение

$$\pm \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

можно переписать в виде, не связанном с выбором системы координат, а именно:

$$\pm \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|.$$

Если области Σ_i (а следовательно, и D_i) достаточно малы, то

$$\iint\limits_{D_i} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, du\, dv = \left\{ |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \Big|_{u=u_i,\, v=v_i} + \varepsilon_i \right\} d_i,$$

где d_i — площадь области D_i, u_i, v_i — координаты точки M_i и $\max \varepsilon_i \to 0$ при измельчении разбиения поверхности Σ. Таким образом, сумма площадей проекций всех частичных поверхностей Σ_i на соответствующие касательные плоскости равна

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| \Big|_{u=u_i,\, v=v_i} \right\} d_i + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i d_i. \tag{3.42}$$

---

*) Правильнее было бы писать $x = x_i(u, v)$, $y = y_i(u, v)$, $z = z_i(u, v)$, потому что эти уравнения соответствуют i-й системе координат, связанной с касательной плоскостью и нормалью в точке M_i.

Предел этого выражения при неограниченном измельчении разбиения поверхности мы и назвали площадью поверхности. Этот предел существует и равен интегралу

$$\iint\limits_D |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, du\, dv$$

(поскольку в (3.42) первое слагаемое есть интегральная сумма для этого интеграла, а предел второго равен нулю). Для завершения доказательства остается установить, что

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \qquad (3.43)$$

Пусть ω — угол между векторами $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. Тогда

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| = |\mathbf{r}_u|\,|\mathbf{r}_v| \sin\omega = |\mathbf{r}_u|\,|\mathbf{r}_v| \sqrt{1-\cos^2\omega} =$$
$$= \sqrt{\mathbf{r}_u^2\mathbf{r}_v^2 - \mathbf{r}_u^2\mathbf{r}_v^2\cos^2\omega} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. С вектором $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ мы уже встречались выше (п. 5 § 3). Там мы установили, что этот вектор имеет следующие компоненты:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

следовательно, длина его равна

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Таким образом, формулу (3.41) площади поверхности можно переписать так:

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv. \qquad (3.41')$$

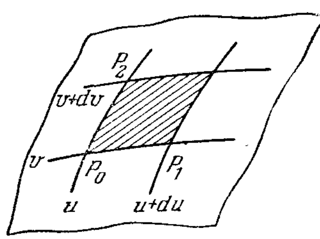

Рис. 3.22.

Замечание 2. Геометрический смысл полученной нами формулы (3.41) состоит в том, что подынтегральное выражение $\sqrt{g_{11}g_{12} - g_{12}^2}\,du\,dv$ (с точностью до бесконечно малых высших порядков) — площадь «бесконечно малого параллелограмма», вырезаемого из поверхности Σ двумя парами бесконечно близких координатных линий $u = u_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0$ и $v = v_0 + dv$ (рис. 3.22). Действительно, вершины P_0, P_1, P_2 этого параллелограмма имеют криволинейные координаты (u_0, v_0), $(u_0 + du, v_0)$ и $(u_0, v_0 + dv)$ соответственно.

Поэтому с точностью до малых выше первого порядка имеем

$$\overline{P_0P_1} = \mathbf{r}_u\,du, \quad \overline{P_0P_2} = \mathbf{r}_v\,dv.$$

Площадь $d\sigma$ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{P_0P_1}$ и $\overline{P_0P_2}$, равна модулю их векторного произведения

$$d\sigma = |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\,du\,dv.$$

В силу (3.43) это выражение можно переписать так:

$$d\sigma = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv.$$

Рассмотрим важнейшие частные случаи формулы (3.41). Если поверхность Σ задана явным уравнением

$$z = f(x, y),$$

то, как мы уже видели выше (см. п. 2, пример 4), в этом случае

$$g_{11} = 1 + f_x'^2, \quad g_{12} = f_x'f_y', \quad g_{22} = 1 + f_y'^2,$$

откуда

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}.$$

Следовательно, площадь поверхности $z = f(x, y)$ выражается формулой

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dx\,dy, \tag{3.44}$$

причем в данном случае D — проекция поверхности Σ на плоскость xy.

З а м е ч а н и е 1. Так как

$$\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} = \frac{1}{\cos(\mathbf{N}, z)}$$

(см. п. 5 § 3), то формулу (3.44) можно переписать так:

$$\sigma = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\cos(\mathbf{N}, z)}.$$

Смысл ее состоит в том, что элемент площади поверхности равен его проекции на плоскость xy, деленной на косинус угла между нормалями к этому элементу поверхности и к плоскости xy.

З а м е ч а н и е 2. Если поверхность Σ состоит из конечного числа кусков, каждый из которых представим уравнением вида $z = f(x, y)$, то ее площадь можно вычислить, применив формулу (3.44) к каждому такому куску в отдельности.

П р и м е р. Найти площадь части параболоида $z = x^2 + y^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение. Искомая площадь равна

$$\sigma=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$\sigma=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr=\frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi}\left[(4r^2+1)^{3/2}\right]_0^a d\varphi=$$

$$=\frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi}\left[(4a^2+1)^{3/2}-1\right]d\varphi=\frac{\pi}{6}\left[(4a^2+1)^{3/2}-1\right].$$

Предположим теперь, что поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z)=0$. Если поверхность такова, что это уравнение можно однозначно разрешить относительно z (это равносильно тому, что наша поверхность пересекается любой вертикальной прямой не более чем в одной точке), то, воспользовавшись правилами дифференцирования неявных функций, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Подставляя эти выражения вместо f'_x и f'_y в формулу (3.44), получаем

$$\sigma=\iint\limits_D\frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|}\,dx\,dy.\qquad(3.45)$$

Здесь опять-таки, как и в формуле (3.44), подынтегральная функция представляет собой не что иное, как обратную величину косинуса угла между нормалью к поверхности и осью z.

Упражнение. Найти площадь части поверхности конуса $x^2+y^2-z^2=0$, лежащей внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$.

Ответ. $\sigma=2\sqrt{2}\pi a^2$.

§ 5. Кривизна линий на поверхности. Вторая квадратичная форма

В предыдущих параграфах мы получили формулы для вычисления длин кривых на поверхности, углов между кривыми и площади поверхности. Однако эти величины еще не определяют форму поверхности. Например, цилиндр и плоскость — это разные поверхности,