ГЛАВА 4

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Нахождение массы материальной кривой по ее плотности, вычисление работы силового поля вдоль некоторого пути и ряд других задач требуют введения так называемых криволинейных интегралов, т. е. интегралов от функций, заданных вдоль кривых. Этому понятию, важному как для самого анализа, так и для его физических приложений, посвящена настоящая глава.

Рассмотрение различных физических задач, связанных с интегрированием функций вдоль линий, приводит к необходимости введения двух типов криволинейных интегралов, называемых обычно криволинейными интегралами первого и второго рода. Впрочем, как мы увидим, эти два типа криволинейных интегралов легко преобразуются друг в друга.

§ 1. Криволинейные интегралы первого рода

1. Определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть AB — некоторая кривая, гладкая или кусочно-гладкая*), и пусть $f(M)$ — функция, заданная на этой кривой. Рассмотрим некоторое разбиение этой кривой на части $A_{i-1}A_i$ точками

$$A=A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n=B, \tag{4.1}$$

выберем на каждой из дуг $A_{i-1}A_i$ произвольную точку M_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta l_i, \tag{4.2}$$

---

*) Напомним, что кривая, заданная уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, называется *гладкой*, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные, не обращающиеся в нуль одновременно (иными словами, если кривая в каждой точке имеет касательную и направление этой касательной непрерывно зависит от точки касания). Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кусков, называется *кусочно-гладкой*.

где Δl_i — длина дуги $A_{i-1}A_i$ (рис. 4.1). Мы будем называть такие суммы *интегральными суммами*. Введем следующее определение:

Определение. *Если при стремлении* $\max \Delta l_i$ *к нулю интегральные суммы* (4.2) *стремятся к некоторому конечному пределу*)* J, *то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от функции* $f(M)$ *по кривой* AB *и обозначается*

$$\int\limits_{AB} f(M)\,dl. \tag{4.3}$$

Поскольку точки кривой AB определяются своими координатами (x, y), функцию $f(M)$, заданную на AB, мы будем обычно писать в виде $f(x, y)$, а сам интеграл $\int\limits_{AB} f(M)\,dl$ — в виде

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl.$$

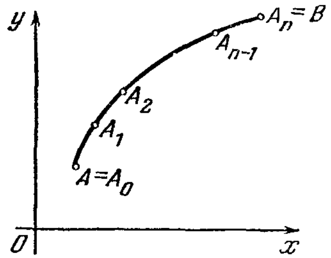

Рис. 4.1.

При этом, однако, следует иметь в виду, что переменные x и y здесь не независимы, а связаны условием: точка (x, y) лежит на кривой AB.

Нетрудно убедиться в том, что понятие криволинейного интеграла первого рода на самом деле почти не отличается от обычного понятия определенного интеграла функции одной переменной и легко к нему сводится. Действительно, приняв на кривой AB за параметр длину дуги l, отсчитываемую от начальной точки A, запишем эту кривую с помощью уравнений вида

$$x = x(l), \quad y = y(l) \qquad (0 \leqslant l \leqslant L). \tag{4.4}$$

При этом функция $f(x, y)$, заданная на AB, сведется к функции $f(x(l), y(l))$ переменной l. Обозначив $\overset{*}{l_i}$ значение параметра l, отвечающее точке M_i, перепишем интегральную сумму (4.2) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x(\overset{*}{l_i}),\ y(\overset{*}{l_i})\right)\Delta l_i. \tag{4.5}$$

---

*) Как и в случае определенных интегралов (см. вып. 1, гл. 10, § 1), число J называется пределом интегральных сумм, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\left| J - \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta l_i \right| < \varepsilon$, как только $\max \Delta l_i$ достаточно мал.

Это — интегральная сумма, отвечающая определенному интегралу

$$\int_0^L f(x(l),\ y(l))\,dl.$$

Раз интегральные суммы (4.2) и (4.5) равны между собой, то равны и отвечающие им интегралы; таким образом,

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_0^L f(x(l),\ y(l))\,dl, \tag{4.6}$$

причем оба эти интеграла существуют или не существуют одновременно. Следовательно, если функция $f(M)$ непрерывна *) (или же кусочно-непрерывна и ограничена) вдоль кусочно-гладкой кривой AB, то криволинейный интеграл (4.3) заведомо существует, поскольку при этих условиях существует определенный интеграл, стоящий в равенстве (4.6) справа.

Замечание. Хотя, как это ясно из сказанного, криволинейный интеграл первого рода непосредственно сводится к определенному интегралу от функции одной переменной, между этими понятиями имеется следующее различие. В интегральных суммах (4.2) величины Δl_i (длины дуг $A_{i-1}A_i$) — обязательно положительные, независимо от того, какую точку кривой AB мы считаем начальной, а какую — конечной. Таким образом, выбор на кривой AB того или иного направления (ориентация этой кривой) на величину интеграла (4.3) никак не влияет, т. е.

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_{BA} f(M)\,dl, \tag{4.7}$$

в то время как определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ при перестановке пределов меняет знак.

Для сведения криволинейного интеграла первого рода к обыкновенному определенному интегралу нет необходимости пользоваться натуральным параметром (длиной дуги). Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \tag{4.8}$$

причем $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны, а $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ кусочно-непрерывны и ограничены и $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$. Тогда на AB можно ввести

*) Мы говорим, что функция $f(M)$, определенная на спрямляемой кривой, непрерывна на этой кривой, если она непрерывна на ней как функция параметра l.

в качестве параметра длину дуги l, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки. Выберем при этом направление отсчета для l так, чтобы возрастанию параметра t отвечало возрастание длины дуги l. Тогда l будет монотонно возрастающей функцией t и

$$dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \tag{4.9}$$

Воспользовавшись равенством (4.6) и формулой замены переменной в определенном интеграле, получим

$$\int\limits_{AB} f(M)\,dl = \int\limits_0^L f(x(l),\ y(l))\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t),\ \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt,$$

причем здесь $t_0 < t_1$. Итак, справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть AB — гладкая кривая, заданная уравнениями*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (t \in [t_0,\ t_1]),$$

и $f(x,\ y)$ — функция, заданная на этой кривой. Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_{AB} f(x,\ y)\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t),\ \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt, \tag{4.10}$$

причем стоящий слева криволинейный интеграл существует в том и только том случае, когда существует определенный интеграл, стоящий справа.

В частности, если кривая AB задана явным уравнением

$$y = y(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

то формула (4.10) сведения криволинейного интеграла к определенному принимает вид

$$\int\limits_{AB} f(M)\,dl = \int\limits_a^b f(x,\ y(x))\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{4.11}$$

Упражнение. Записать криволинейный интеграл от функции $f(x,\ y)$ по дуге AB, заданной полярным уравнением

$$r = r(\varphi) \qquad (\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2)$$

в виде определенного интеграла по φ.

Ответ. $\displaystyle\int\limits_{AB} f(x,\ y)\,dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.$

Замечание. Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

от неотрицательной функции можно трактовать как площадь криволинейной трапеции (рис. 4.2, *а*). Подобным же образом криволинейный интеграл

$$\int_{AB} f(M)\,dl$$

можно при $f(M) \geqslant 0$ представлять себе как площадь куска цилиндрической поверхности, составленной из перпендикуляров к плоскости xy, восставленных в точках M кривой AB и имеющих переменную длину $f(M)$ (рис. 4.2, *б*).

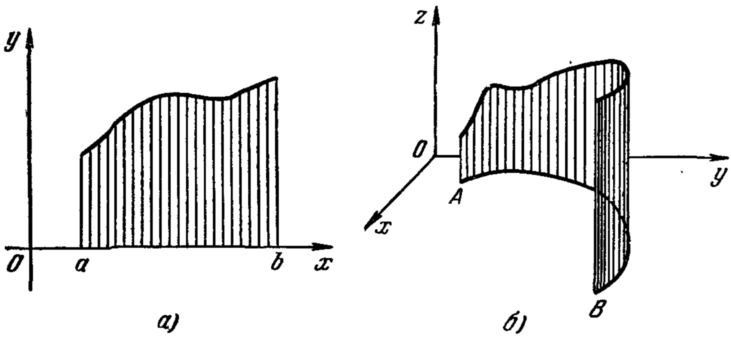

Рис. 4.2.

2. Свойства криволинейных интегралов. Свойства криволинейных интегралов вполне аналогичны свойствам определенных интегралов и сразу вытекают из формулы (4.6), сводящей криволинейный интеграл к определенному. Перечислим основные из них.

1 (линейность). *Если* $k = \text{const}$, *а* $f(M)$ *интегрируема на* AB, *то*

$$\int_{AB} kf(M)\,dl = k\int_{AB} f(M)\,dl$$

и интеграл слева заведомо существует.

2 (линейность). *Если* $f(M)$ *и* $g(M)$ *интегрируемы на* AB, *то* $f(M) \pm g(M)$ *интегрируема и*

$$\int_{AB} (f(M) \pm g(M))\,dl = \int_{AB} f(M)\,dl \pm \int_{AB} g(M)\,dl.$$

3 (монотонность). *Если $f(M)$ — неотрицательная интегрируемая функция, то всегда*

$$\int_{AB} f(M)\,dl \geqslant 0.$$

4 (аддитивность). *Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB, то*

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_{AC} f(M)\,dl + \int_{CB} f(M)\,dl,$$

причем интеграл слева существует тогда и только тогда, если существуют оба интеграла справа.

5 (оценка по модулю). *Если $f(M)$ интегрируема на AB, то $|f(M)|$ тоже интегрируема и*

$$\left|\int_{AB} f(M)\,dl\right| \leqslant \int_{AB} |f(M)|\,dl.$$

6 (теорема о среднем). *Если $f(M)$ непрерывна на AB, то на этой дуге найдется такая точка M^*, что*

$$\int_{AB} f(M)\,dl = f(M^*)\,L$$

(L — длина дуги AB).

7. Подчеркнем, наконец, еще раз, что

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_{BA} f(M)\,dl,$$

т. е. что выбор направления на дуге AB не влияет на величину интеграла от скалярной функции $f(M)$ по этой дуге.

3. Некоторые применения криволинейных интегралов первого рода. Укажем некоторые типичные задачи, в которых удобно пользоваться криволинейными интегралами первого рода.

1) *Нахождение массы материальной кривой по ее плотности.* Материальной кривой будем называть кусочно-гладкую кривую, вдоль которой распределена некоторая масса. Линейной плотностью $\rho(M)$ материальной кривой в точке M называется предел, к которому стремится отношение массы $\Delta\mu$, находящейся на дуге MM' этой кривой, к длине дуги MM', при условии, что длина этой дуги стремится к нулю. Иначе говоря, если l — длина дуги AM и $\mu(M)$ — масса этой дуги, то $\rho(M) = \dfrac{d\mu(l)}{dl}$. Отсюда ясно, что

масса μ_{AB} дуги AB выражается интегралом $\int_0^l \rho\,dl$, т. е. криволинейным интегралом

$$\int_{AB} \rho(M)\,dl$$

от плотности, взятым по кривой AB.

2) *Вычисление координат центра масс материальной кривой.* Пусть масса распределена вдоль кривой AB с плотностью $\rho(x, y)$ *). Разбив эту кривую на части длины Δl_i и выбрав на каждой из этих частей некоторую точку (x_i, y_i), можно материальную кривую приближенно рассматривать как систему масс $\rho(x_i, y_i)\Delta l_i$, расположенных в точках (x_i, y_i). Центр масс такой системы материальных точек имеет координаты

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \rho(x_i, y_i)\,\Delta l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)\,\Delta l_i}, \qquad y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \rho(x_i, y_i)\,\Delta l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)\,\Delta l_i}.$$

Эти выражения можно считать приближенными значениями координат x_c и y_c центра масс материальной кривой AB. Для получения точных значений этих координат следует перейти к пределу при $\max \Delta l_i \to 0$. В результате такого предельного перехода получаем

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} x\rho(x, y)\,dl}{\int\limits_{AB} \rho(x, y)\,dl}, \qquad y_c = \frac{\int\limits_{AB} y\rho(x, y)\,dl}{\int\limits_{AB} \rho(x, y)\,dl}. \tag{4.12}$$

В частности, в случае однородной кривой $\rho = \text{const}$ имеем

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} x\,dl}{\int\limits_{AB} dl}, \qquad y_c = \frac{\int\limits_{AB} y\,dl}{\int\limits_{AB} dl}. \tag{4.13}$$

3) *Вычисление моментов инерции материальной кривой.* Момент инерции системы точечных масс m_i относительно некоторой

*) Здесь и в последующих задачах нам естественно задавать точки кривой их декартовыми координатами x, y (см. п. 1).

прямой равен

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i,$$

где r_i — расстояние от i-й массы до этой прямой. В частности, моменты инерции такой системы масс, лежащих в плоскости xy, относительно осей x и y равны соответственно

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i \quad \text{и} \quad I_y = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i$$

(где (x_i, y_i) — координаты точечной массы m_i). Для получения моментов инерции относительно координатных осей материальной кривой AB, вдоль которой распределена масса с плотностью $\rho(x, y)$, нужно сделать такой же предельный переход, как и в предыдущей задаче. Тогда для моментов инерции кривой AB относительно координатных осей мы получим выражения

$$I_x = \int_{AB} y^2 \rho(x, y)\, dl, \qquad I_y = \int_{AB} x^2 \rho(x, y)\, dl. \tag{4.14}$$

4) *Притяжение точечной массы материальной кривой.* Пусть снова AB — материальная кривая с плотностью $\rho(x, y)$ и m_0 — точечная масса, имеющая координаты (x_0, y_0). Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что кривая AB притягивает массу m_0 с силой, проекции которой на координатные оси равны соответственно

$$F_x = \gamma m_0 \int_{AB} \frac{\rho(x, y)(x - x_0)}{r^3}\, dl, \qquad F_y = \gamma m_0 \int_{AB} \frac{\rho(x, y)(y - y_0)}{r^3}\, dl.$$

Здесь γ — постоянная тяготения и $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Если считать, что интегрирование вектора по некоторому параметру означает интегрирование каждой из его компонент (см. § 1 гл. 3), то эти две скалярные формулы можно заменить одной векторной: сила $\mathbf{F}$, с которой материальная точка m_0 притягивается материальной кривой AB, равна

$$\mathbf{F} = \gamma m_0 \int_{AB} \frac{\rho(x, y)}{r^3}\, \mathbf{r}\, dl, \tag{4.15}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор с компонентами $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$.

4. Криволинейные интегралы первого рода в пространстве. Определение криволинейного интеграла первого рода, сформулированное выше для плоской кривой, дословно переносится на случай функции $f(M)$, заданной вдоль некоторой пространственной кривой.

Если эта кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1),$$

то криволинейный интеграл первого рода, взятый вдоль этой кривой, сводится к определенному интегралу по формуле

$$\int\limits_{AB} f(M)\,dl=\int\limits_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt.$$

Условия существования и основные свойства пространственных криволинейных интегралов вполне аналогичны тем, которые были сформулированы выше для плоского случая. Криволинейные интегралы первого рода в пространстве естественно возникают при рассмотрении таких задач, как вычисление массы пространственной кривой по заданной плотности, нахождение координат центра масс материальной пространственной кривой, ее моментов инерции и т. п. Соответствующие формулы читатель легко может получить с помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше для плоского случая.

§ 2. Криволинейные интегралы второго рода

1. Постановка задачи. Работа силового поля. Введем теперь криволинейные интегралы другого типа — так называемые криволинейные интегралы второго рода.

Для того чтобы подойти к этому понятию, начнем с конкретной физической задачи. Рассмотрим плоское силовое поле, т. е. некоторую плоскую область, в каждой точке M которой задана сила $\mathbf{F}(M)$. Компоненты $\mathbf{F}(M)$ по осям x и y обозначим $P(M)$ и $Q(M)$.

Определим работу этого силового поля при перемещении точки вдоль некоторой кривой AB.

Если сила $\mathbf{F}$ постоянна (и по величине и по направлению), а путь AB прямолинеен, то соответствующая работа равна произведению величины этой силы на длину пути и на косинус угла между силой и перемещением, т. е. работа равна скалярному произведению

$$(\mathbf{F},\ \overline{AB}).$$

Найдем теперь выражение для работы в общем случае, т. е. когда сила $\mathbf{F}$ переменна, а путь криволинеен. Пусть AB — гладкая кривая, лежащая в той области, где задано силовое поле. Разобьем кривую AB на части точками

$$A=M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_n=B$$

и рассмотрим ломаную, вершинами которой служат точки M_i (рис. 4.3). Считая, что вдоль каждого звена $M_{i-1}M_i$ ломаной сила $\mathbf{F}$ сохраняет постоянное значение, скажем, равное $F(M_i)$, вычислим работу, отвечающую перемещению вдоль этой ломаной. Если $(x_i,\ y_i)$ —