Если эта кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1),$$

то криволинейный интеграл первого рода, взятый вдоль этой кривой, сводится к определенному интегралу по формуле

$$\int\limits_{AB} f(M)\,dl=\int\limits_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt.$$

Условия существования и основные свойства пространственных криволинейных интегралов вполне аналогичны тем, которые были сформулированы выше для плоского случая. Криволинейные интегралы первого рода в пространстве естественно возникают при рассмотрении таких задач, как вычисление массы пространственной кривой по заданной плотности, нахождение координат центра масс материальной пространственной кривой, ее моментов инерции и т. п. Соответствующие формулы читатель легко может получить с помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше для плоского случая.

§ 2. Криволинейные интегралы второго рода

1. Постановка задачи. Работа силового поля. Введем теперь криволинейные интегралы другого типа — так называемые криволинейные интегралы второго рода.

Для того чтобы подойти к этому понятию, начнем с конкретной физической задачи. Рассмотрим плоское силовое поле, т. е. некоторую плоскую область, в каждой точке M которой задана сила $\mathbf{F}(M)$. Компоненты $\mathbf{F}(M)$ по осям x и y обозначим $P(M)$ и $Q(M)$.

Определим работу этого силового поля при перемещении точки вдоль некоторой кривой AB.

Если сила $\mathbf{F}$ постоянна (и по величине и по направлению), а путь AB прямолинеен, то соответствующая работа равна произведению величины этой силы на длину пути и на косинус угла между силой и перемещением, т. е. работа равна скалярному произведению

$$(\mathbf{F},\ \overline{AB}).$$

Найдем теперь выражение для работы в общем случае, т. е. когда сила $\mathbf{F}$ переменна, а путь криволинеен. Пусть AB — гладкая кривая, лежащая в той области, где задано силовое поле. Разобьем кривую AB на части точками

$$A=M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_n=B$$

и рассмотрим ломаную, вершинами которой служат точки M_i (рис. 4.3). Считая, что вдоль каждого звена $M_{i-1}M_i$ ломаной сила $\mathbf{F}$ сохраняет постоянное значение, скажем, равное $F(M_i)$, вычислим работу, отвечающую перемещению вдоль этой ломаной. Если $(x_i,\ y_i)$ —

координаты точки M_i и

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1},$$

то работа, отвечающая перемещению вдоль отрезка M_{i-1}, M_i, равна

$$(\mathbf{F}(M_i),\ \overline{M_{i-1}M_i}) = P(M_i)\,\Delta x_i + Q(M_i)\,\Delta y_i,$$

а работа, отвечающая перемещению вдоль всей ломаной, равна

$$\sum_{i=1}^{n} (P(M_i)\,\Delta x_i + Q(M_i)\,\Delta y_i). \tag{4.16}$$

Эту сумму можно принять за приближенное значение работы, совершаемой силовым полем $\mathbf{F}(M)$ вдоль кривой AB. Для получения точного выражения этой работы нужно в сумме (4.16) перейти к пределу, устремив максимум длин дуг $M_{i-1}M_i$ к нулю. Рассмотрим этот предельный переход в общем виде.

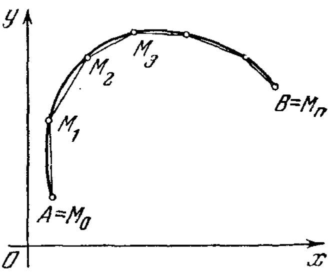


Рис. 4.3.

2. Определение криволинейного интеграла второго рода. Пусть AB — гладкая кривая и $\mathbf{F}(M) = (P(M), Q(M))$ — вектор-функция, определенная на кривой AB. Разобьем эту кривую на части точками

$$A = M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_n = B,$$

координаты которых обозначим соответственно (x_0, y_0), (x_1, y_1), … …, (x_n, y_n). Рассмотрим сумму

$$T = \sum_{i=1}^{n} [P(M_i)\,\Delta x_i + Q(M_i)\,\Delta y_i], \tag{4.17}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Если при стремлении максимума длин дуг $M_{i-1}M_i$ к нулю эти суммы стремятся к некоторому конечному пределу, то этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции* $\mathbf{F} = (P, Q)$ и обозначается *) символом

$$\int_{AB} P(M)\,dx + Q(M)\,dy. \tag{4.18}$$

*) Вместо $P(M)$ и $Q(M)$ мы будем иногда писать $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, понимая под x и y декартовы координаты переменной точки M; в тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, мы будем функции $P(M)$ и $Q(M)$ обозначать просто P и Q, а криволинейный интеграл (4.18) писать в виде $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$.

Этот интеграл представляет собой, очевидно, сумму двух интегралов

$$\int\limits_{AB} P(M)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{AB} Q(M)\,dy,$$

отвечающих векторам $(P,\ 0)$ и $(0,\ Q)$, на которые разлагается вектор $(P,\ Q)$.

Замечание. Понятие криволинейного интеграла второго рода не следует смешивать с тем «покомпонентным» интегрированием векторной величины по скалярному аргументу, с которым мы встречались выше (см. п. 5 § 1 гл. 3 и конец п. 2 § 1 этой главы), например при вычислении силы притяжения материальной точки материальной кривой.

3. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Криволинейный интеграл второго рода легко сводится к интегралу первого рода, рассмотренному в § 1. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть AB — гладкая кривая, заданная уравнениями*

$$x = x(l), \quad y = y(l), \tag{4.19}$$

и $\mathbf{F} = (P,\ Q)$ — *векторная функция, определенная и ограниченная**) *на этой кривой. Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,dl, \tag{4.20}$$

где $\alpha = \alpha(M)$ — угол между касательной к кривой AB в точке M и положительным направлением оси x. При этом стоящий слева интеграл существует, если существует криволинейный интеграл первого рода, стоящий в равенстве (4.20) *справа.*

Доказательство. Докажем равенство

$$\int\limits_{AB} P\,dx = \int\limits_{AB} P\cos\alpha\,dl.$$

Равенство

$$\int\limits_{AB} Q\,dx = \int\limits_{AB} Q\sin\alpha\,dl$$

доказывается так же. Интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx$$

---

*) Вектор-функция $(P,\ Q)$ называется *ограниченной*, если P и Q — ограниченные функции.

представляет собой по определению предел сумм вида

$$T=\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i.$$

Сравним эту сумму с интегральной суммой

$$T^*=\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\cos\alpha(M_i)\,\Delta l_i,$$

отвечающей (при том же самом разбиении кривой AB) интегралу

$$\int\limits_{AB} P\cos\alpha\,dl.$$

Если $x=x(l)$, то в каждой точке M кривой AB

$$\frac{dx}{dl}=\cos\alpha(M) \tag{4.21}$$

и, следовательно,

$$\Delta x_i=\int\limits_{l_{i-1}}^{l_i}\cos\alpha\,dl.$$

Воспользовавшись теоремой о среднем, получаем

$$\Delta x_i=\cos\left(M_i^*\right)\Delta l_i,$$

где M_i^* — некоторая точка дуги $M_{i-1}M_i$. Следовательно,

$$|T-T^*|=\left|\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\left[\cos\alpha(M_i)-\cos\alpha\left(M_i^*\right)\right]\Delta l_i\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|P(M_i)|\cdot\left|\cos\alpha(M_i)-\cos\alpha\left(M_i^*\right)\right|\Delta l_i.$$

Вдоль гладкой кривой функция $\cos\alpha(M)$ непрерывна, а значит (поскольку эта кривая представляет собой замкнутое ограниченное множество), и равномерно непрерывна. Следовательно, каково бы ни было $\varepsilon>0$, для каждого достаточно мелкого разбиения кривой AB имеет место неравенство

$$\left|\cos\alpha(M_i)-\cos\alpha\left(M_i^*\right)\right|<\varepsilon.$$

Тогда

$$|T-T^*|\leqslant C\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i=C\varepsilon L,$$

где $C=\sup|P|$, а L — длина кривой AB. Отсюда следует, что если интегральные суммы T^* имеют предел, то суммы T стремятся к этому же пределу. Тем самым теорема доказана.

Замечание. Выражение $P\cos\alpha + Q\sin\alpha$ представляет собой скалярное произведение $(\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau})$ вектора $\mathbf{F} = (P, Q)$ на единичный вектор $\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, касательный к кривой AB, т. е. проекцию вектора $\mathbf{F} = (P, Q)$ на касательную к AB. Обозначив эту проекцию символом F_τ и воспользовавшись равенством (4.20), мы можем записать криволинейный интеграл (4.18) в виде

$$\int\limits_{AB} F_\tau \, dl. \tag{4.22}$$

Этой краткой записью мы будем часто пользоваться ниже, особенно в гл. 6. Иногда также, особенно в физической литературе, этот интеграл пишут в виде

$$\int\limits_{AB} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}), \tag{4.23}$$

понимая под $d\mathbf{l}$ бесконечно малый вектор с компонентами

$$dx = dl\cos\alpha \quad \text{и} \quad dy = dl\sin\alpha.$$

4. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Из сопоставления теорем 4.1 и 4.2 сразу вытекает следующая

Теорема 4.3. *Пусть AB — гладкая кривая, заданная уравнениями*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{4.24}$$

и пусть $\mathbf{F} = (P, Q)$ — вектор-функция, заданная на этой кривой. Тогда

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{t_0}^{t_1} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\,dt, \tag{4.25}$$

и интеграл слева существует, если существует определенный интеграл, стоящий справа; при этом t_0 — значение параметра t, отвечающее точке A, а t_1 — значение, отвечающее точке B.

Теоремы 4.1 — 4.3 очевидным образом остаются справедливы, если кривая AB не гладкая, а лишь кусочно-гладкая.

Рассмотрим важнейшие частные случаи формулы (4.25).

Если кривая AB задана явным уравнением

$$y = y(x), \tag{4.26}$$

где x пробегает отрезок $[a, b]$, то формула (4.25), сводящая криволинейный интеграл второго рода к определенному, принимает вид

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\,y'(x)]\,dx \tag{4.27}$$

(где $x = a$ отвечает начальной точке A кривой, а $x = b$ — ее конечной точке B). Если, в частности, кривая AB — отрезок горизонтальной прямой $y = y_0$, то вдоль него $y' \equiv 0$ и интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$$

вдоль такого отрезка сводится просто к интегралу

$$\int\limits_a^b P(x, y_0)\,dx.$$

Аналогично для кривой, заданной уравнением

$$x = x(y), \tag{4.28}$$

где y пробегает некоторый отрезок $[c, d]$, имеем

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_c^d [P(x(y), y)\,x' + Q(x(y), y)]\,dy. \tag{4.29}$$

В частности, если AB — отрезок вертикальной прямой $x = x_0$, то $x' \equiv 0$ и интеграл (4.29) сводится к

$$\int\limits_{AB} Q(x_0, y)\,dy. \tag{4.30}$$

Примеры. 1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{AB} x^2\,dx + xy\,dy \tag{4.31}$$

а) вдоль прямолинейного отрезка, идущего из точки (1, 0) в точку (0, 1),

б) вдоль четверти окружности $x = \cos t$, $y = \sin t \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, соединяющей те же точки (рис. 4.4).

Решение.

а) $$\int\limits_{AB} x^2\,dx + xy\,dy = \int\limits_1^0 (x^2 - x(1-x))\,dx =$$
$$= \int\limits_1^0 (2x^2 - x)\,dx = -\frac{1}{6};$$

б) $$\int\limits_{AB} x^2\,dx + xy\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t \sin t + \cos^2 t \sin t)\,dt = 0.$$

2. Вычислить интеграл
$$\int\limits_{AB} 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy \tag{4.32}$$

а) вдоль прямолинейного отрезка, идущего из точки (0, 0) в точку (1, 1),

б) вдоль дуги параболы $y = x^2$, соединяющей те же точки,

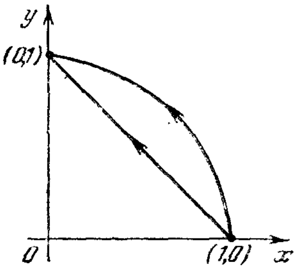


Рис. 4.4.

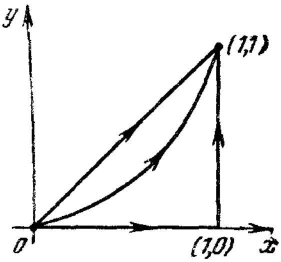


Рис. 4.5.

в) вдоль ломаной, проходящей через точки (0, 0), (1, 0), (1, 1) (рис. 4.5).

Решение.

а) $$\int\limits_{AB} 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy = \int\limits_0^1 (4x^3+1)\,dx = 2;$$

б) $$\int\limits_{AB} 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy = \int\limits_0^1 (5x^4+2x)\,dx = 2;$$

в) $$\int\limits_{AB} 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy =$$
$$= \int\limits_{(0,0)}^{(1,0)} 3x^2y\,dx + \int\limits_{(1,0)}^{(1,1)} (x^3+1)\,dy = \int\limits_0^1 2\,dy = 2.$$

Замечание. Читатель, видимо, обратил внимание на то, что во втором примере мы, взяв три различных пути (соединяющих одни и те же точки), получили три одинаковых результата. Это обстоятельство не случайно. Причину его мы разъясним в § 4.

5. Зависимость криволинейного интеграла второго рода от ориентации кривой. Из определения криволинейного интеграла

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy \tag{4.33}$$

непосредственно следует, что в нем постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, что интеграл от суммы двух векторных функций равен сумме интегралов от слагаемых и т. д. Подчеркнем следующее важное свойство интеграла (4.33): криволинейный интеграл второго рода в отличие от интеграла первого рода, определенного в § 1, зависит от ориентации кривой AB, по которой этот интеграл берется, а именно, при изменении ориентации этой кривой интеграл (4.33) меняет знак:

$$\int\limits_{BA} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{BA} P\,dx + Q\,dy. \tag{4.34}$$

Действительно, изменив направление обхода кривой AB, мы заменим тем самым Δx_i и Δy_i в сумме (4.17) на $-\Delta x_i$ и $-\Delta y_i$ соответственно. При этом изменят знак интегральные суммы (4.17), а следовательно, и их предел.

Это свойство криволинейного интеграла второго рода вполне соответствует физической интерпретации такого интеграла, как работа силового поля вдоль некоторого пути: при изменении направления движения по кривой работа силового поля вдоль этой кривой меняет знак на противоположный.

6. Криволинейные интегралы вдоль самопересекающихся и замкнутых путей. С точки зрения возможных приложений теории криволинейных интегралов целесообразно не исключать из рассмотрения пути интегрирования, которые имеют самопересечения. Иначе говоря, если кривая задана уравнениями

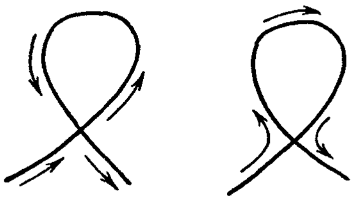
$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

то мы не исключаем того, что существуют два различных значения t_1 и t_2 параметра t, для которых

$$x(t_1) = x(t_2) \quad \text{и} \quad y(t_1) = y(t_2).$$

При этом, однако, когда речь идет об интегралах второго рода, нужно учитывать, что задать путь интегрирования это значит не просто задать множество точек, но и определенное направление обхода. Для кривых с самопересечениями направление обхода не определяется заданием начальной и конечной точек. Например, кривые, изображенные на рис. 4.6, *а* и *б*, нужно рассматривать как две различные кривые. Сказанное относится не только к плоским, но и к пространственным кривым.

Часто приходится рассматривать криволинейные интегралы, взятые по тому или иному замкнутому контуру. При этом под замкнутым контуром (на плоскости) мы понимаем такую кривую



а) *б)*

Рис. 4.6.

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

что

$$x(a) = x(b) \quad \text{и} \quad y(a) = y(b).$$

Не исключается, что этот контур имеет еще и точки самопересечения, т. е. что, кроме $t = a$ и $t = b$, есть и другие различные между собой значения параметра, которым отвечают одинаковые значения x и y.

Если замкнутый контур не имеет точек самопересечения, то для него можно указать два и только два направления обхода (ориентации): против часовой стрелки (положительная ориентация) и по часовой стрелке (отрицательная ориентация). Если рассматривается интеграл второго рода

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy$$

вдоль такого контура, то его значения, отвечающие двум различным ориентациям контура C, равны между собой по абсолютной величине и противоположны по знаку. Мы будем, как правило, рассматривая замкнутый контур, считать его ориентированным положительно, а криволинейный интеграл второго рода по отрицательно ориентированному контуру заменять интегралом, взятым в положительном направлении, но со знаком минус перед интегралом.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру C часто обозначают символом

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy.$$

7. Криволинейные интегралы второго рода вдоль пространственных кривых. Выше мы рассматривали криволинейные интегралы от векторных функций вдоль плоских кривых. Все сказанное о них более или менее автоматически переносится на пространственный случай. Пусть AB — гладкая пространственная кривая и $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ — непрерывная вектор-функция, заданная вдоль этой кривой. Разбив AB на части точками

$$A=M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_n=B$$

с координатами $(x_i,\ y_i,\ z_i)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\{P(M_i)\Delta x_i+Q(M_i)\Delta y_i+R(M_i)\Delta z_i\},$$

где

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\quad \Delta y_i=y_i-y_{i-1},\quad \Delta z_i=z_i-z_{i-1}.$$

Предел этих сумм мы назовем *криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции* $\mathbf{F}=(P,\ Q,\ R)$ *вдоль пространственной кривой* AB и обозначим

$$\int_{AB}P(M)\,dx+Q(M)\,dy+R(M)\,dz, \tag{4.35}$$

или *)

$$\int_{AB}P(x,\ y,\ z)\,dx+Q(x,\ y,\ z)\,dy+R(x,\ y,\ z)\,dz.$$

С помощью рассуждений, дословно повторяющих те, которые были проведены для плоского случая, устанавливается формула, сводящая интеграл (4.35) к криволинейному интегралу первого рода

$$\int_{AB}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_{AB}[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]\,dl$$

(здесь α, β, γ — углы между касательной к AB и осями координат x, y и z).

Если гладкая кривая AB задана уравнениями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),$$

причем точке A отвечает $t=t_0$, а точке B отвечает $t=t_1$, то имеет место равенство

$$\int_{AB}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_{t_0}^{t_1}[P(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\,\varphi'(t)+$$
$$+Q(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\,\psi'(t)+R(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\,\chi'(t)]\,dt, \tag{4.36}$$

сводящее криволинейный интеграл второго рода к определенному интегралу.

Так как выражение $P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$ — это проекция вектора $\mathbf{F}=(P,\ Q,\ R)$ на направление касательной к AB, то,

---

*) Часто для краткости мы будем писать его просто в виде

$$\int_{AB}P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

обозначив эту проекцию F_τ, мы можем, как и в плоском случае, записать криволинейный интеграл (4.35) в виде

$$\int_{AB} F_\tau\, dl.$$

Все свойства плоских криволинейных интегралов, изложенные выше, автоматически переносятся на пространственный случай. В частности, криволинейный интеграл (4.35) меняет знак при изменении ориентации кривой, т. е.

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_{BA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

В соответствии с этим в определенном интеграле, стоящем в формуле (4.36) справа, нижний предел t_0 — это значение параметра, отвечающее начальной точке A кривой AB, а верхний предел t_1 — значение параметра, отвечающее конечной точке B. (Независимо от того, какое из чисел t_0, t_1 больше, а какое меньше.)

§ 3. Формула Грина

В этом параграфе мы выведем так называемую формулу Грина *), связывающую криволинейный интеграл

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy,$$

взятый по границе некоторой области, с двойным интегралом по самой этой области. Эта формула широко применяется как в самом анализе, так и в его приложениях. Некоторые из этих применений будут рассмотрены ниже.

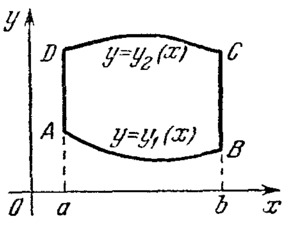


Рис. 4.7.

1. Вывод формулы Грина. Рассмотрим сначала область G, имеющую простой вид: снизу и сверху она ограничена кусочно-гладкими кривыми

$$y = y_1(x), \quad y = y_2(x), \tag{4.37}$$

а слева и справа — вертикальными отрезками

$$x = a, \quad x = b \tag{4.38}$$

(рис. 4.7). Границу $ABCDA$ области мы будем считать ориентированной положительно, т. е. будем считать принятым на ней то направление обхода, при котором сама область G остается все время

*) Джордж Грин (1793—1841) — английский математик, автор ряда исследований по математической физике.