обозначив эту проекцию F_τ, мы можем, как и в плоском случае, записать криволинейный интеграл (4.35) в виде

$$\int_{AB} F_\tau \, dl.$$

Все свойства плоских криволинейных интегралов, изложенные выше, автоматически переносятся на пространственный случай. В частности, криволинейный интеграл (4.35) меняет знак при изменении ориентации кривой, т. е.

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_{BA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

В соответствии с этим в определенном интеграле, стоящем в формуле (4.36) справа, нижний предел t_0 — это значение параметра, отвечающее начальной точке A кривой AB, а верхний предел t_1 — значение параметра, отвечающее конечной точке B. (Независимо от того, какое из чисел t_0, t_1 больше, а какое меньше.)

§ 3. Формула Грина

В этом параграфе мы выведем так называемую формулу Грина *), связывающую криволинейный интеграл

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy,$$

взятый по границе некоторой области, с двойным интегралом по самой этой области. Эта формула широко применяется как в самом анализе, так и в его приложениях. Некоторые из этих применений будут рассмотрены ниже.

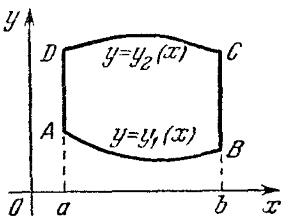

Рис. 4.7.

1. Вывод формулы Грина. Рассмотрим сначала область G, имеющую простой вид: снизу и сверху она ограничена кусочно-гладкими кривыми

$$y = y_1(x), \quad y = y_2(x), \tag{4.37}$$

а слева и справа — вертикальными отрезками

$$x = a, \quad x = b \tag{4.38}$$

(рис. 4.7). Границу $ABCDA$ области мы будем считать ориентированной положительно, т. е. будем считать принятым на ней то направление обхода, при котором сама область G остается все время

*) Джордж Грин (1793—1841) — английский математик, автор ряда исследований по математической физике.

слева. Пусть функция $P(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial P}{\partial y}$ во всей области G, включая ее границу.

Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy$ и постараемся преобразовать его в криволинейный. Для этого сведем его к повторному интегралу и выполним интегрирование по y. Получим

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$$

$$= \int\limits_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x, y_2(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x, y_1(x))\,dx. \tag{4.39}$$

Каждый из этих двух определенных интегралов можно рассматривать как криволинейный интеграл, взятый по соответствующей дуге (см. (4.27)), а именно:

$$\int\limits_a^b P(x, y_2(x))\,dx = \int\limits_{DC} P(x, y)\,dx = -\int\limits_{CD} P(x, y)\,dx$$

и

$$-\int\limits_a^b P(x, y_1(x))\,dx = -\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx.$$

Добавив к правой части равенства (4.39) еще два криволинейных интеграла:

$$-\int\limits_{BC} P(x, y)\,dx \quad \text{и} \quad -\int\limits_{DA} P(x, y)\,dx,$$

каждый из которых равен нулю (как интеграл по dx вдоль вертикального отрезка), получим равенство

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = -\int\limits_{AB} P\,dx - \int\limits_{BC} P\,dx - \int\limits_{CD} P\,dx - \int\limits_{DA} P\,dx,$$

т. е.

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = -\int\limits_{ABCDA} P\,dx. \tag{4.40}$$

Мы доказали это равенство для области, ограниченной линиями (4.37) и (4.38). Но формулу (4.40) можно распространить и на любую область, которую можно разбить на конечное число частей такого вида. Действительно, пусть область G с границей L разбита на части G_i, $i=1, 2, \ldots, n$, для каждой из которых имеет место равенство

$$\iint\limits_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{L_i} P\, dx$$

(L_i — граница области G_i). Просуммировав эти равенства по i от 1 до n, мы слева получим двойной интеграл, взятый по всей области G, а справа получится сумма криволинейных интегралов, взятых по контурам L_i. Каждый из этих контуров состоит из линий, ограничивающих область G, и из вспомогательных линий, с помощью которых область G разбивается на части. Но каждая из этих вспомогательных линий входит в состав ровно двух контуров L_i, следовательно, по каждой из них криволинейный интеграл будет взят дважды, причем в двух противоположных направлениях (рис. 4.8). Поэтому при суммировании интегралов вида

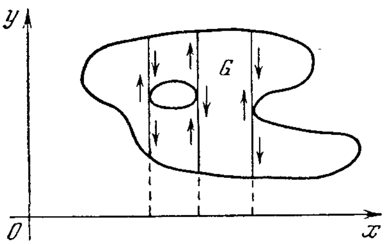

Рис. 4.8.

$$\int\limits_{L_i} P\, dx$$

интегралы по всем вспомогательным линиям взаимно уничтожатся и останется лишь интеграл по границе области G, т. е. мы получим равенство

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{L} P\, dx, \tag{4.41}$$

где L — положительно ориентированная *) граница области G.

Поменяем теперь x и y ролями и рассмотрим область, ограниченную горизонтальными отрезками

$$y = c, \quad y = d \tag{4.42}$$

и линиями

$$x = x_1(y), \quad x = x_2(y) \tag{4.43}$$

(рис. 4.9). Пусть функция $Q(x, y)$ и ее производная $\frac{\partial Q}{\partial x}$ определе-

*) То есть на L выбрано то направление обхода, при котором область G остается слева.

лены и непрерывны в области G (включая границу). Записав двойной интеграл

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

в виде

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx$$

и проделав те же выкладки, что и при выводе формулы (4.40), получим равенство

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{ABCDA} Q\,dy,$$

аналогичное (4.40) (с той лишь разницей, что справа нет знака минус). Рассуждения, ничем не отличающиеся от изложенных выше, показывают, что равенство

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_L Q\,dy \tag{4.44}$$

верно не только для областей, ограниченных линиями (4.42) и (4.43), но и для конечных объединений таких областей.

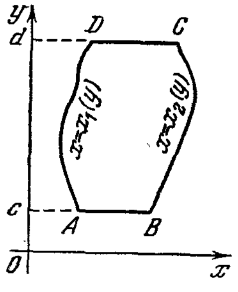

Рис. 4.9.

Будем, для краткости, называть область G *простой*, если она допускает разбиение как на части с границами вида (4.37), (4.38), так и на части с границами вида (4.42), (4.43). Для простой области справедливы, в силу доказанного, как равенство (4.41), так и равенство (4.44). Вычтя (4.41) из (4.44), получим формулу

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{4.45}$$

где криволинейный интеграл берется по границе L области G в положительном направлении. Это и есть *формула Грина*, которую мы хотели установить. Итак, мы получили следующий результат:

Теорема 4.4. *Пусть G — простая область и пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области G. Тогда имеет место формула Грина* (4.45).

Замечание 1. Если граница L области G состоит из нескольких отдельных контуров, то $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ означает сумму интегралов, взятых по составляющим L контурам, причем по каждому из них берется то направление обхода, при котором сама область G остается слева (рис. 4.10).

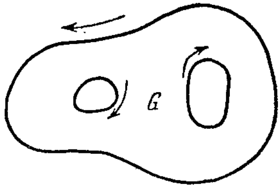

Рис. 4.10.

Замечание 2. При выводе формулы Грина мы предполагали, что P и Q и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны не только внутри области, но и на ее границе. Однако относительно производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ достаточно предположить, что они непрерывны и ограничены внутри области G. Действительно, рассмотрим снова область G, ограниченную кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ и вертикальными отрезками $x = a$, $x = b$ (рис. 4.7). Пусть $\delta > 0$ и пусть G_δ — область, ограниченная сверху и снизу кривыми $y = y_2(x) - \delta$ и $y = y_1(x) + \delta$ соответственно, а слева и справа вертикальными отрезками $x = a + \delta$ и $x = b - \delta$. Область G_δ при всяком $\delta > 0$ лежит вместе с границей внутри G, следовательно, для G_δ выполнены те условия, при которых равенство (4.41) было доказано. Таким образом,

$$\iint\limits_{G_\delta} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{L_\delta} P\,dx \tag{4.46}$$

(L_δ — граница области G_δ). Так как площадь области G_δ отличается от площади области G не больше чем на $l\delta$, где l — длина границы L области G, то интеграл, стоящий в равенстве (4.46) слева, отличается от

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

не более чем на $l\delta M$, где M — верхняя грань $\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|$ внутри G. Далее, функция $P(x, y)$ непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна и ограничена в замкнутой области G. Отсюда сразу следует, что

$$\int\limits_{L_\delta} P\,dx \to \int\limits_{L} P\,dx \quad \text{при } \delta \to 0.$$

Таким образом, в равенстве (4.46) можно сделать предельный переход при $\delta \to 0$, и мы получаем, что равенство

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{L} P\,dx$$

верно для области, изображенной на рис. 4.7, а следовательно, и для любой простой области. Аналогично устанавливается и равенство

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_L Q\,dy.$$

Воспользовавшись понятием несобственного двойного интеграла *), можно было бы требование ограниченности производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области G заменить требованием существования интеграла $\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ (хотя бы как несобственного интеграла).

Замечание 3. Мы доказали формулу Грина для областей, которые мы условились называть простыми. К ним заведомо относятся все многоугольные фигуры. С помощью аппроксимации криволинейных областей многоугольными нетрудно получить, что формула Грина верна и для любой области, ограниченной конечным числом кусочно-гладких линий.

2. Вычисление площади с помощью формулы Грина. Из формулы Грина вытекают некоторые полезные формулы для вычисления площади области.

Пусть G — некоторая простая область с границей L и S — площадь этой области. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_L x\,dy.$$

Применив к нему формулу Грина, получим

$$\int_L x\,dy = \iint_G dx\,dy = S.$$

Аналогично получается формула

$$S = -\int_L y\,dx,$$

а также следующая, более симметричная, формула **) для

*) О несобственных интегралах см. гл. 9.

**) Можно, конечно, получить бесконечно много различных формул вида

$$S = \int_L P\,dx + Q\,dy.$$

Для этого достаточно в качестве P и Q брать любые функции, удовлетворяющие условию $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

площади:

$$S=\frac{1}{2}\int_L x\,dy-y\,dx. \tag{4.47}$$

Пример. Вычислить площадь области, ограниченной астроидой

$$x=a\cos^3 t, \qquad y=a\sin^3 t.$$

Решение. Применяя формулу (4.47), получаем

$$S=\frac{1}{2}\int_L x\,dy-y\,dx=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,[\cos^2 t+\sin^2 t]\,dt=$$

$$=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

§ 4. Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Интегрирование полных дифференциалов

1. Постановка вопроса. В § 2, рассматривая примеры криволинейных интегралов, мы обратили внимание на то, что в некоторых случаях криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy$$

зависит не от самой кривой AB, а только от начальной и конечной точек, т. е. принимает одинаковые значения для всех кривых, соединяющих фиксированные точки A и B. Сейчас мы установим условия, при которых такая независимость интеграла от выбора пути имеет место. С этим вопросом связана другая важная задача, которую мы здесь также рассмотрим: нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу.

2. Случай односвязной области. Напомним (см. гл. 3), что плоская область G называется *односвязной*, если, каков бы ни был замкнутый контур L, лежащий внутри этой области, ограниченная этим контуром (конечная) часть плоскости целиком принадлежит G.

Теорема 4.5. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$*