площади:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_L x\,dy - y\,dx. \tag{4.47}$$

Пример. Вычислить площадь области, ограниченной астроидой

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t.$$

Решение. Применяя формулу (4.47), получаем

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_L x\,dy - y\,dx = \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,[\cos^2 t + \sin^2 t]\,dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

§ 4. Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Интегрирование полных дифференциалов

1. Постановка вопроса. В § 2, рассматривая примеры криволинейных интегралов, мы обратили внимание на то, что в некоторых случаях криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$$

зависит не от самой кривой AB, а только от начальной и конечной точек, т. е. принимает одинаковые значения для всех кривых, соединяющих фиксированные точки A и B. Сейчас мы установим условия, при которых такая независимость интеграла от выбора пути имеет место. С этим вопросом связана другая важная задача, которую мы здесь также рассмотрим: нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу.

2. Случай односвязной области. Напомним (см. гл. 3), что плоская область G называется *односвязной*, если, каков бы ни был замкнутый контур L, лежащий внутри этой области, ограниченная этим контуром (конечная) часть плоскости целиком принадлежит G.

Теорема 4.5. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными* $\frac{\partial P}{\partial y}$

и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *в замкнутой ограниченной односвязной области* G. *Тогда следующие четыре условия равносильны между собой* (т. е. выполнение любого одного из них влечет за собой выполнение остальных трех):

1. *Интеграл*

$$\oint P\,dx + Q\,dy,$$

взятый по любому замкнутому пути, лежащему в G, *равен нулю.*

2. *Интеграл*

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$$

не зависит от выбора пути интегрирования.

3. *Выражение* $P\,dx + Q\,dy$ *представляет собой полный дифференциал некоторой однозначной функции, определенной в области* G.

4. *В области* G *всюду*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (4.48)$$

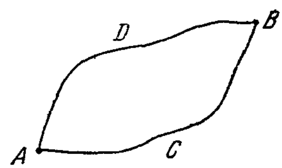

Рис. 4.11.

Доказательство этой теоремы мы проведем по следующей логической схеме:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1,$$

т. е. покажем, что из первого условия следует второе, из второго — третье, из третьего — четвертое, а из четвертого — снова первое. Тем самым будет доказана равносильность всех четырех условий.

а) $1 \to 2$. Рассмотрим в области G два произвольных пути, соединяющих точки A и B, скажем, ACB и ADB (рис. 4.11). В сумме они составляют замкнутый путь $ACBDA$. По условию интеграл, взятый по любому замкнутому пути, равен нулю, т. е.

$$\int_{ACBDA} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Но

$$\int_{ACBDA} P\,dx + Q\,dy = \int_{ACB} P\,dx + Q\,dy + \int_{BDA} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_{ACB} P\,dx + Q\,dy - \int_{ADB} P\,dx + Q\,dy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{ACB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{ADB} P\,dx + Q\,dy.$$

Утверждение «$1 \to 2$» доказано *).

б) $2 \to 3$. Пусть интеграл $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования; тогда, если точку A зафиксировать, то этот интеграл будет однозначной функцией координат x и y точки B:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = U(x, y).$$

Покажем, что эта функция $U(x, y)$ дифференцируема и что

$$dU = P\,dx + Q\,dy.$$

Для этого достаточно показать, что производные $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ существуют и равны $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ соответственно **).

Вычислим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x}.$$

Величина $\Delta U = U(x + \Delta x, y) - U(x, y)$ представляет собой интеграл от $P\,dx + Q\,dy$, взятый по пути, соединяющему точки (x, y) и $(x + \Delta x, y)$. Так как, по условию, этот интеграл не зависит от вида кривой, то можно считать, что путь совпадает с

---

*) Если кривые ACB и ADB имеют общие точки, отличные от A и B (рис. 4.12), то небольшое усложнение проведенных рассуждений приводит к тому же самому результату.

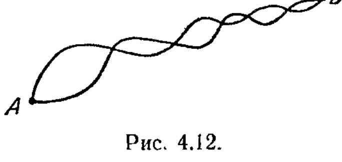

Рис. 4.12.

**) Как известно, функция, имеющая непрерывные частные производные, дифференцируема.

горизонтальным отрезком BB_1 (рис. 4.13). Таким образом,

$$\frac{\Delta U}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{BB_1} P\,dx+Q\,dy=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x,\,y}^{x+\Delta x,\,y} P(x,\,y)\,dx=P(x+\theta\,\Delta x,\,y).$$

(В последнем равенстве мы использовали теоремv о среднем для .интегралов.) Следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\,\Delta x,\,y)=$$
$$=P(x,\,y),$$

поскольку $P(x,\,y)$ непрерывна. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial U}{\partial y}=$ $=Q(x,\,y)$.

в) $3\to 4$. Если

$$P\,dx+Q\,dy$$

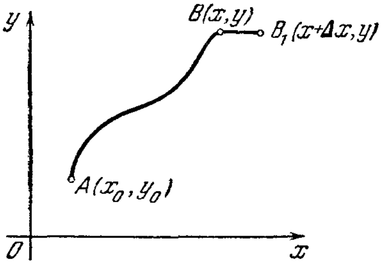

Рис. 4.13.

— полный дифференциал некоторой функции $U(x,\,y)$, то

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P,\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=Q.$$

Но тогда по теореме о смешанных производных

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

г) $4\to 1$. Пусть равенство $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ выполнено и пусть L — произвольный контур, лежащий в области G. Так как эта область по условию односвязна, то ограниченная контуром L часть плоскости принадлежит области G, в которой определены функции P, Q и их производные. Поэтому криволинейный интеграл

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy$$

по формуле Грина можно преобразовать в двойной:

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

где D — область, ограниченная контуром L. В силу (4.48), интеграл справа равен нулю. Следовательно,

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy=0$$

для всякого замкнутого контура L, лежащего внутри G. Доказательство теоремы закончено.

3. Нахождение функции по ее полному дифференциалу. В процессе доказательства теоремы 4.5 мы получили решение следующей задачи, с которой нам еще придется встречаться (см. п. 4 § 2 гл. 6): найти функцию, полный дифференциал которой есть заданное выражение

$$P\,dx + Q\,dy.$$

Ограничившись случаем, когда функции P и Q и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой односвязной области G, мы доказали (теорема 4.5), что $P\,dx + Q\,dy$ служит полным дифференциалом некоторой функции в том и только том случае, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Далее, мы показали (там же), что если это равенство выполнено, то условию

$$dU = P\,dx + Q\,dy \tag{4.49}$$

удовлетворяет функция

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy.$$

Наконец, из формулы конечных приращений (см. вып. 1, гл. 8, § 9) следует, что две функции, имеющие одинаковые полные дифференциалы, отличаются друг от друга лишь на постоянное слагаемое. Следовательно, формула

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy + C \tag{4.50}$$

(где (x_0, y_0) — фиксированная точка, а C — произвольная постоянная) содержит все функции, удовлетворяющие условию (4.49). Так как в равенстве (4.50) интеграл не зависит от пути, то мы можем выбрать линию, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x, y), по своему усмотрению. Удобно, например, за путь интегрирования взять ломаную, составленную из горизонтального и вертикального отрезков *) (рис. 4.14). При этом выборе пути равенство (4.50) принимает вид

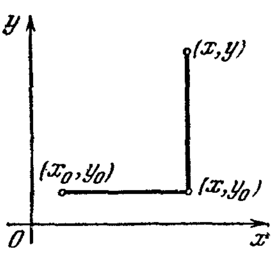

Рис. 4.14.

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} P\,dx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} Q\,dy + C.$$

*) Если эти отрезки принадлежат G.

Начальную точку (x_0, y_0) можно выбрать произвольно (в пределах той области, в которой определены функции P и Q). Изменение этой точки равносильно, очевидно, изменению аддитивной постоянной C.

Практически при нахождении функции по ее полному дифференциалу удобно поступить следующим образом. Если

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=Q, \tag{4.51}$$

то, интегрируя первое из этих равенств по x и рассматривая в нем y как параметр, получим

$$U(x, y)=\int P\,dx+f_1, \tag{4.52}$$

где f_1 не зависит от x (но, вообще говоря, зависит от y, т. е. $f_1=f_1(y)$). Далее, интегрируя второе из равенств (4.51) по y и рассматривая в нем x как параметр, получим

$$U(x, y)=\int Q\,dy+f_2, \tag{4.53}$$

где $f_2=f_2(x)$; если мы сможем подобрать функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ так, чтобы правые части равенств (4.52) и (4.53) совпали, то полученная таким образом функция переменных x и y и будет той функцией, полный дифференциал которой совпадает с $P\,dx+Q\,dy$.

Пример. Пусть

$$dU=(2xy+1)\,dx+(x^2+3y^2)\,dy.$$

Интегрируя коэффициент при dx по x, имеем

$$\int(2xy+1)\,dx=x^2y+x+f_1(y), \tag{4.54}$$

а интегрирование коэффициента при dy по y дает

$$\int(x^2+3y^2)\,dy=x^2y+y^3+f_2(x). \tag{4.55}$$

Правые части равенств (4.54) и (4.55) совпадут, если мы положим

$$f_1(y)=y^3+C, \qquad f_2(x)=x+C.$$

Таким образом, получаем, что

$$U=x^2y+x+y^3+C.$$

4. Криволинейные интегралы в многосвязной области. На последнем шаге доказательства теоремы 4.5, т. е. там, где мы из условия

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{4.56}$$

вывели справедливость равенства

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0 \tag{4.57}$$

для любого замкнутого контура, была существенно использована *односвязность* области G.

Рассмотрим простой пример, показывающий, что в *многосвязной* области из условия (4.56) равенство (4.57), вообще говоря, не следует. Пусть

$$J = \int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy. \tag{4.58}$$

Подынтегральное выражение не имеет смысла в точке (0, 0), поэтому мы исключим из рассмотрения некоторую окрестность начала координат. В оставшейся части плоскости (это будет уже многосвязная область) коэффициенты при dx и dy непрерывны, имеют непрерывные частные производные и

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Однако интеграл (4.58), взятый по некоторому замкнутому пути, не равен, вообще говоря, нулю: например, если C — окружность, заданная уравнениями

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t,$$

то

$$J = \int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \tag{4.59}$$

Выясним, какими свойствами обладает интеграл

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

если функции P и Q удовлетворяют условию*)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

но область G, в которой они заданы, *многосвязна*. Рассмотрим для определенности область G, изображенную на рис. 4.15, т. е.

---

*) Мы по-прежнему предполагаем, что P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в замкнутой ограниченной области G.

имеющую три «лакуны». Рассмотрим сначала некоторый замкнутый контур L, который не охватывает ни одной из этих лакун. Тогда к интегралу, взятому по такому контуру, можно применить формулу Грина, и мы получим, что этот интеграл равен нулю.

Пусть теперь L_1 — контур, охватывающий одну из лакун. Здесь формула Грина уже неприменима и интеграл по такому контуру, вообще говоря, нулю не равен (см. приведенный выше пример). Покажем, что *величина этого интеграла не зависит от выбора контура, охватывающего данную лакуну*. Пусть L_1 и L_1' — два таких контура. Соединив их вспомогательной линией (ab), получим контур

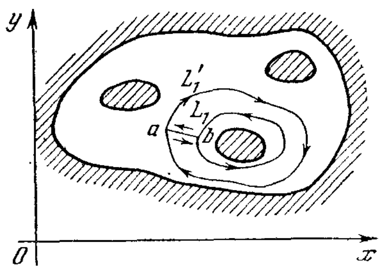

Рис. 4.15.

$$(ab)+L_1+(ba)-L_1' \quad (4.60)$$

(знак минус перед L_1' означает, что этот контур обходится в отрицательном направлении). Этот контур не охватывает ни одной из лакун, следовательно, интеграл по нему равен нулю. Но интегралы по (ab) и (ba) равны по величине и противоположны по знаку. Таким образом, получаем

$$\int\limits_{L_1} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{-L_1'} P\,dx+Q\,dy=0,$$

т. е.

$$\int\limits_{L_1} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{L_1'} P\,dx+Q\,dy.$$

Таким образом, каждой из лакун в области G отвечает некоторое определенное число — значение криволинейного интеграла $\oint P\,dx+Q\,dy$, взятого по любому из замкнутых контуров, охватывающих эту лакуну. Оно называется циклической постоянной этой лакуны. Отсюда легко получается, что значение интеграла $\oint P\,dx+Q\,dy$ по произвольному замкнутому контуру записывается так. Пусть ω_1, ω_2, ω_3 — циклические постоянные лакун, имеющихся в области G, и пусть контур L_1 обходит первую лакуну k_1 раз, вторую k_2 раз, а третью k_3 раз (при этом под каждым из k_i понимается алгебраическая сумма ориентированных обходов, т. е., число обходов против часовой стрелки минус число обходов по часовой стрелке), тогда

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3.$$

Если в многосвязной области G провести разрезы I, II, III, как это показано на рис. 4.16, то мы получим односвязную область, и в ней можно построить однозначную функцию

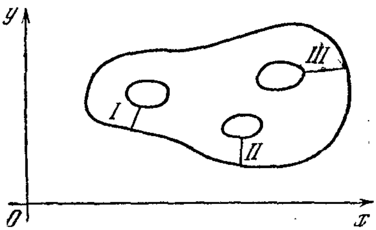

Рис. 4.16.

$$U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy, \tag{4.61}$$

однако, в силу сказанного выше, ее значения на противоположных краях разреза I будут отличаться на ω_1, на краях разреза II — на ω_2 и на краях разреза III — на ω_3. Если же разрезов не делать, то выражение (4.61) будет опять-таки функцией, полный дифференциал которой равен $P\,dx + Q\,dy$, но уже функцией многозначной. Ее значения в фиксированной точке (отвечающие путям, делающим различное число обходов вокруг лакун) отличаются друг от друга слагаемым вида

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3,$$

где k_1, k_2 и k_3 могут принимать любые целые значения*).

Ясно, что все сказанное здесь автоматически переносится на случай любого числа лакун.

---

*) Конечно, может оказаться случайно, что все циклические постоянные ω_i равны нулю. Тогда функция $U(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy$ окажется однозначной и при отсутствии разрезов. В этом случае будут иметь место все утверждения теоремы 4.5 (независимо от связности области).