ГЛАВА 5
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В разных физических вопросах часто встречаются функции, заданные на той или иной поверхности. Примерами таких функций могут служить плотность распределения зарядов на поверхности проводника, освещенность поверхности, скорость жидкости, протекающей через некоторую поверхность, и т. д. Эта глава посвящена изучению интегралов от функций на поверхности, так называемых поверхностных интегралов, и некоторым их применениям.

Теория поверхностных интегралов во многом аналогична теории криволинейных интегралов, изложенной в предыдущей главе. В частности, мы и здесь будем различать интегралы первого и второго рода.

Вводя определение поверхностного интеграла, мы будем опираться на некоторые сведения о поверхностях, изложенные в §§ 3 и 4 гл. 3, и в первую очередь на понятие площади кривой поверхности.

§ 1. Поверхностные интегралы первого рода

1. Определение поверхностного интеграла от скалярной функции. Пусть в точках кусочно-гладкой поверхности Σ с кусочно-гладкой границей*) L определена некоторая ограниченная функция $f(M)$. Разобьем поверхность Σ кусочно-гладкими кривыми на части $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ (рис. 5.1). Площадь каждой из них обозначим σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Выбрав в каждой из этих частей произвольную точку M_i, составим сумму

$$T = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\sigma_i, \tag{5.1}$$

которую мы будем называть *интегральной суммой*, отвечающей функции $f(M)$ (при данном разбиении поверхности Σ и данном выборе точек M_i).

---

*) Поверхность Σ может быть, в частности, замкнутой.

Введем следующее

Определение. *Если при стремлении наибольшего из диаметров частей Σ_i поверхности Σ к нулю интегральные суммы T стремятся к некоторому конечному пределу, то этот предел называется* ***поверхностным интегралом первого рода*** *от функции $f(M)$ по поверхности Σ и обозначается символом*

$$\iint\limits_{\Sigma} f(M)\, d\sigma. \tag{5.2}$$

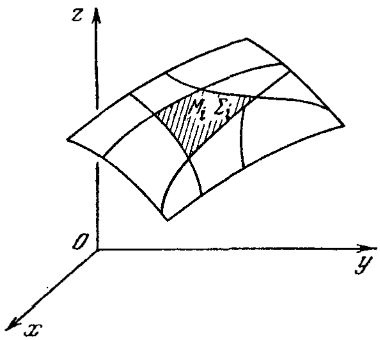

Рис. 5.1.

Точку M поверхности Σ можно задать декартовыми координатами x, y, z. Поэтому функцию $f(M)$, определенную на Σ, мы будем обозначать также $f(x, y, z)$, а соответствующий поверхностный интеграл — символом $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma$.

При этом, однако, необходимо помнить, что переменные x, y и z не независимы, а связаны условием: точка (x, y, z) лежит на поверхности Σ.

2. Сведение поверхностного интеграла к двойному. Мы сформулировали определение поверхностного интеграла первого рода, теперь возникает вопрос об условиях его существования и о способах его фактического вычисления.

Оба эти вопроса решаются легко, путем сведения поверхностного интеграла к двойному.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда поверхность задана уравнением в декартовых координатах.

Теорема 5.1. *Пусть Σ — гладкая поверхность, заданная уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, где D — замкнутая ограниченная область, а $f(x, y, z)$ — некоторая ограниченная функция, определенная на поверхности Σ. Тогда справедливо равенство*

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dx\, dy. \tag{5.3}$$

При этом поверхностный интеграл, стоящий слева, существует, если существует двойной интеграл, стоящий в правой части равенства (5.3).

Доказательство. Разобьем поверхность Σ кусочно-гладкими кривыми на n частей Σ_i. Спроектировав это разбиение на плоскость xy, мы получим разбиение области D на квадрируемые части D_i (рис. 5.2). При этом диаметр каждого из элементов D_i будет не больше, чем диаметр соответствующего элемента Σ_i поверхности Σ.

Рассмотрим теперь интегральную сумму

$$T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\sigma_i, \qquad (5.4)$$

отвечающую поверхностному интегралу $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\,d\sigma$. Площадь σ_i элемента Σ_i можно представить в виде

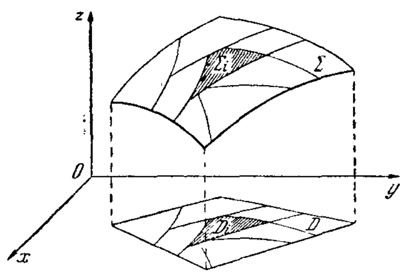

Рис. 5.2.

$$\sigma_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dx\,dy,$$

где $z = z(x, y)$, и затем, воспользовавшись теоремой о среднем для двойного интеграла от непрерывной функции *), в виде

$$\sigma_i = \sqrt{1 + z_x'^2(x_i^*, y_i^*) + z_y'^2(x_i^*, y_i^*)}\,S_i,$$

где (x_i^*, y_i^*) — некоторая точка, принадлежащая области D_i, а S_i — площадь этой области. Следовательно, интегральную сумму (5.4) можно переписать так:

$$T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\sqrt{1 + z_x'^2(x_i^*, y_i^*) + z_y'^2(x_i^*, y_i^*)}\,S_i. \qquad (5.4')$$

Сравним ее с интегральной суммой

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)}\,S_i, \qquad (5.5)$$

отвечающей двойному интегралу, стоящему в равенстве (5.3) справа (при том разбиении области D, которое отвечает данному разбиению поверхности Σ).

Суммы (5.4′) и (5.5) отличаются друг от друга только тем, что в (5.5) значения как функции f, так и выражения $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}$ берутся в одной и той же точке (x_i, y_i), произвольно выбираемой внутри элемента D_i, а в (5.4′) значения $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}$ берутся

*) Поверхность $z = z(x, y)$ мы считаем гладкой, следовательно, $\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}$ — непрерывная функция.

в точке (x_i^*, y_i^*), диктуемой нам теоремой о среднем и, хотя и принадлежащей тому же элементу D_i, но, вообще говоря, не совпадающей с точкой (x_i, y_i).

Функция $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}$ непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна в замкнутой ограниченной области D, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что

$$\Big|\sqrt{1+z_x'^2(x_i, y_i)+z_y'^2(x_i, y_i)}-\\ -\sqrt{1+z_x'^2(x_i^*, y_i^*)+z_y'^2(x_i^*, y_i^*)}\Big| < \varepsilon, \quad (5.6)$$

как только максимум диаметров областей D_i станет меньше, чем δ_1. Функция $f(x, y, z)$ по условию ограничена, т. е.

$$|f(x, y, z)| \leqslant K = \text{const},$$

поэтому из (5.6) следует оценка:

$$|T-\tilde{T}| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\Big[\sqrt{1+z_x'^2(x_i^*, y_i^*)+z_y'^2(x_i^*, y_i^*)}-\\ -\sqrt{1+z_x'^2(x_i, y_i)+z_y'^2(x_i, y_i)}\Big] S_i\Big| \leqslant K\varepsilon\sum_{i=1}^{n} S_i = K\varepsilon S, \quad (5.7)$$

где S — площадь области D.

Теперь мы уже легко закончим доказательство теоремы. Если интеграл, стоящий в (5.3) справа, существует, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_2 > 0$, что для всякой суммы $\tilde{T}$, отвечающей такому разбиению $\{D_i\}$ области D, диаметры элементов которого меньше δ_2, выполнено неравенство

$$\left|\iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+z_x'^2(x, y)+z_y'^2(x, y)}\,dx\,dy-\tilde{T}\right| < \varepsilon. \quad (5.8)$$

Пусть теперь $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, а $\{\Sigma_i\}$ — такое разбиение поверхности Σ, что диаметры всех Σ_i меньше, чем δ, и пусть $\{D_i\}$ — отвечающее ему разбиение области D. Тогда диаметр каждого из D_i меньше, чем δ, и, следовательно, выполнены неравенства (5.7) и (5.8). Из этих неравенств получаем, что

$$\left|\iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+z_x'^2(x, y)+z_y'^2(x, y)}\,dx\,dy-T\right| < \\ < \varepsilon(1+KS)$$

для всякого достаточно мелкого разбиения поверхности Σ. Но это и означает, что предел интегральных сумм T существует и равен интегралу, стоящему в (5.3) справа. Теорема доказана.

Следствие. *Если поверхность Σ — гладкая, а функция $f(x, y, z)$ непрерывна на ней, то интеграл*

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma$$

существует.

Действительно, в этом случае в равенстве (5.3) справа стоит интеграл от непрерывной функции. Он существует, а следовательно, существует и стоящий слева поверхностный интеграл.

Замечание 1. Так как (см. п. 6 § 3 гл. 3)

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{1}{\cos(\mathbf{n}, z)},$$

то равенство (5.3) можно переписать так:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma=\iint_{D} f(x, y, z(x, y))\frac{dx\, dy}{\cos(\mathbf{n}, z)}. \qquad (5.9)$$

Переменив роли координат x, y и z, можно в случае поверхности, заданной уравнением

$$x=x(y, z),$$

получить равенство

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma=\iint_{D_1} f(x(y, z), y, z)\frac{dy\, dz}{\cos(\mathbf{n}, x)} \qquad (5.9_1)$$

(где D_1 — проекция поверхности Σ на плоскость yz), а в случае поверхности

$$y=y(z, x)$$

— равенство

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma=\iint_{D_2} f(x, y(z, x), z)\frac{dz\, dx}{\cos(\mathbf{n}, y)} \qquad (5.9_2)$$

(где D_2 — проекция Σ на плоскость zx).

Замечание 2. Если поверхность Σ состоит из нескольких частей, каждая из которых может быть представлена уравнением вида

$$x=x(y, z), \quad y=y(z, x) \quad \text{или} \quad z=z(x, y),$$

то для сведения поверхностного интеграла, взятого по такой поверхности, к двойному можно воспользоваться тем, что поверхностный интеграл по Σ равен сумме интегралов, взятых по составляющим эту поверхность частям, и затем применить формулы (5.9) к каждому из этих частичных интегралов в отдельности.

Если поверхность задана параметрическим уравнением, то рассуждения, не отличающиеся сколько-нибудь существенно от приведенных выше, приводят к следующей теореме.

Теорема 5.1'. *Пусть Σ — гладкая поверхность, заданная уравнением*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v),$$

и $f(x, y, z)$ — ограниченная функция, определенная на этой поверхности. Тогда справедливо равенство

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du\, dv, \tag{5.10}$$

причем поверхностный интеграл, стоящий слева, существует, если только существует двойной интеграл в правой части равенства.

Здесь D — область изменения параметров u и v, а g_{11}, g_{12} и g_{22} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности (см. п. 1 § 4 гл. 3). Выражение $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du\, dv$ представляет собой элемент площади поверхности, записанный в криволинейных координатах. Таким образом, формула (5.10) означает следующее: *для того чтобы записать поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, d\sigma$ в виде двойного, нужно подставить в него вместо декартовых координат x, y, z точек поверхности их выражения через криволинейные координаты u и v, а элемент площади $d\sigma$ тоже заменить его выражением через криволинейные координаты.*

Формула (5.3) и формулы (5.9), (5.9_1) и (5.9_2) являются, очевидно, частными случаями общей формулы (5.10). Легко проверить, что все эти формулы остаются в силе, когда поверхность не гладкая, а кусочно-гладкая.

3. Некоторые применения поверхностных интегралов к механике. Поверхностные интегралы первого рода часто встречаются в физических задачах. С такими интегралами приходится иметь дело при изучении распределения масс по поверхности, например при нахождении координат центра масс, моментов инерции материальных поверхностей и т. п. Вывод соответствующих формул, по существу, ничем не отличается от вывода формул, относящихся к распределению масс в плоской области или вдоль кривой (см. пп. 3—5 § 4 гл. 1 и п. 3 § 1 гл. 4), поэтому мы приведем лишь окончательные результаты, предоставив все выкладки читателю.

Пусть по поверхности Σ (гладкой или кусочно-гладкой) распределена некоторая масса с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$, представляющей собой непрерывную функцию на Σ. Такую поверхность Σ будем кратко называть *материальной поверхностью*. Тогда имеют место следующие формулы:

1) Масса μ материальной поверхности Σ равна

$$\mu = \iint\limits_{\Sigma} \rho(x, y, z)\, d\sigma.$$

2) Координаты центра масс материальной поверхности определяются формулами:

$$x_c = \frac{\iint\limits_{\Sigma} x\rho(x, y, z)\, d\sigma}{\iint\limits_{\Sigma} \rho(x, y, z)\, d\sigma}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_{\Sigma} y\rho(x, y, z)\, d\sigma}{\iint\limits_{\Sigma} \rho(x, y, z)\, d\sigma},$$

$$z_c = \frac{\iint\limits_{\Sigma} z\rho(x, y, z)\, d\sigma}{\iint\limits_{\Sigma} \rho(x, y, z)\, d\sigma}.$$

В частности, для однородной поверхности ($\rho = \mathrm{const}$)

$$x_c = \frac{\iint\limits_{\Sigma} x\, d\sigma}{\iint\limits_{\Sigma} d\sigma}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_{\Sigma} y\, d\sigma}{\iint\limits_{\Sigma} d\sigma}, \qquad z_c = \frac{\iint\limits_{\Sigma} z\, d\sigma}{\iint\limits_{\Sigma} d\sigma}.$$

3) Момент инерции поверхности Σ относительно оси z равен

$$\iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)\, d\sigma.$$

Аналогично выражаются моменты инерции относительно других осей.

4. Поверхностные интегралы от векторных функций. Общее понятие поверхностного интеграла первого рода. Выше мы рассматривали поверхностные интегралы от скалярных функций. Это понятие легко переносится на векторные функции. Пусть

$$\mathbf{F}(M) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

— некоторая векторная функция, заданная на поверхности Σ. Определим интеграл от этой функции по поверхности Σ, положив

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{F}(M)\, d\sigma = \mathbf{i} \iint\limits_{\Sigma} P(M)\, d\sigma + \mathbf{j} \iint\limits_{\Sigma} Q(M)\, d\sigma + \mathbf{k} \iint\limits_{\Sigma} R(M)\, d\sigma. \tag{5.11}$$

Мы назовем его *поверхностным интегралом первого рода от векторной функции* $\mathbf{F}$. Значение такого интеграла представляет собой вектор. Вопросы об условиях существования поверхностного интеграла первого рода от векторной функции, о сведении его к двойному, о его свойствах и т. д. непосредственно сводятся к соответствующим вопросам для интегралов от скалярных функций P, Q и R — компонент вектора $\mathbf{F}$.

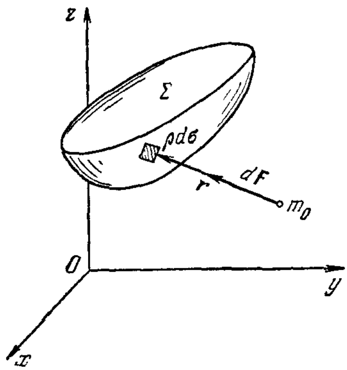

Рис. 5.3.

Для иллюстрации этого понятия вычислим силу, с которой материальная поверхность притягивает материальную точку.

Пусть $\rho(x, y, z)$ — плотность распределения масс на поверхности Σ и m_0 — масса, сосредоточенная в некоторой точке (x_0, y_0, z_0), не лежащей на этой поверхности. Элемент поверхности $d\sigma$ несет на себе элемент массы $\rho(x, y, z)\,d\sigma$, а сила $d\mathbf{F}$, с которой этот элемент притягивает точечную массу m_0, равна по закону Ньютона

$$d\mathbf{F} = \gamma m_0 \rho(x, y, z) \frac{\mathbf{r}}{r^3}\, d\sigma, \tag{5.12}$$

где γ — постоянная, зависящая от выбора единиц, а $\mathbf{r}$ — вектор, соединяющий точки (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z) (рис. 5.3). Полная сила $\mathbf{F}$, с которой вся поверхность Σ притягивает массу m_0, равна сумме элементарных сил (5.12), т. е. поверхностному интегралу

$$\gamma m_0 \iint\limits_{\Sigma} \rho(x, y, z) \frac{\mathbf{r}}{r^3}\, d\sigma.$$

Таким образом (поскольку $\mathbf{r} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$),

$$\mathbf{F} = \gamma m_0 \left[\mathbf{i} \iint\limits_{\Sigma} \rho(x, y, z) \frac{x - x_0}{r^3}\, d\sigma + \right.$$
$$\left. + \mathbf{j} \iint\limits_{\Sigma} \rho(x, y, z) \frac{y - y_0}{r^3}\, d\sigma + \mathbf{k} \iint\limits_{\Sigma} \rho(x, y, z) \frac{z - z_0}{r^3}\, d\sigma \right].$$

Этот интеграл обязательно существует, если поверхность Σ гладкая или кусочно-гладкая, а поверхностная плотность $\rho(x, y, z)$ непрерывна на Σ.

В том понятии поверхностного интеграла, которое мы рассмотрели, было существенно, что каждый «интегральный элемент»

$$f(M)\,d\sigma$$

зависел от величины элемента площади $d\sigma$ и значения функции $f(M)$ (скалярной или векторной) в данной точке, но *не зависел от ориентации поверхностного элемента $d\sigma$ в пространстве.* Именно так обстоит дело в тех физических задачах, которые мы рассматривали здесь: масса элемента материальной поверхности или сила, с которой этот элемент притягивает материальную точку, не будут меняться, если этот элемент поверхности мы каким-либо образом повернем.

Однако существуют задачи другого типа, в которых ориентация элемента $d\sigma$ играет существенную роль. К ним относится, например, задача (которую мы рассмотрим ниже) о вычислении количества жидкости, протекающей через поверхность за единицу времени, а также и ряд других. Этот второй круг задач приводит нас к другому понятию поверхностного интеграла, так называемому *поверхностному интегралу второго рода.* Ему будет посвящен следующий параграф. Как мы увидим ниже, поверхностные интегралы первого и второго рода связаны между собой простыми формулами.

§ 2. Поверхностные интегралы второго рода

1. Сторона поверхности. Для того чтобы определить поверхностный интеграл второго рода, нам нужно ввести сначала понятие стороны поверхности, аналогичное понятию ориентации кривой.

Пусть Σ—гладкая поверхность. Возьмем на Σ некоторую внутреннюю точку M_0, проведем через нее нормаль к Σ и выберем на этой нормали одно из двух возможных направлений. Это можно сделать, фиксировав определенный единичный вектор $\mathbf{n}$, нормальный к Σ в точке M_0. Проведем теперь на поверхности Σ через точку M_0 какой-либо замкнутый контур C, не имеющий общих точек с границей поверхности, и будем передвигать единичный вектор $\mathbf{n}$ из точки M_0 вдоль C так, чтобы этот вектор все время оставался нормальным к Σ и чтобы его направление менялось при этом передвижении непрерывно. Поскольку вектор $\mathbf{n}$ все время остается нормальным к Σ, то имеются две возможности: 1) при возвращении в точку M_0 вектор $\mathbf{n}$ возвращается в первоначальное положение; 2) в результате обхода по контуру C вектор $\mathbf{n}$ меняет свое направление на противоположное.

Введем следующее

Определение. *Гладкая поверхность Σ называется двусторонней, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности Σ и не имеющему общих точек с ее границей, не меняет направления нормали к поверхности.*