В том понятии поверхностного интеграла, которое мы рассмотрели, было существенно, что каждый «интегральный элемент»

$$f(M)\, d\sigma$$

зависел от величины элемента площади $d\sigma$ и значения функции $f(M)$ (скалярной или векторной) в данной точке, но *не зависел от ориентации поверхностного элемента $d\sigma$ в пространстве.* Именно так обстоит дело в тех физических задачах, которые мы рассматривали здесь: масса элемента материальной поверхности или сила, с которой этот элемент притягивает материальную точку, не будут меняться, если этот элемент поверхности мы каким-либо образом повернем.

Однако существуют задачи другого типа, в которых ориентация элемента $d\sigma$ играет существенную роль. К ним относится, например, задача (которую мы рассмотрим ниже) о вычислении количества жидкости, протекающей через поверхность за единицу времени, а также и ряд других. Этот второй круг задач приводит нас к другому понятию поверхностного интеграла, так называемому *поверхностному интегралу второго рода.* Ему будет посвящен следующий параграф. Как мы увидим ниже, поверхностные интегралы первого и второго рода связаны между собой простыми формулами.

§ 2. Поверхностные интегралы второго рода

1. Сторона поверхности. Для того чтобы определить поверхностный интеграл второго рода, нам нужно ввести сначала понятие стороны поверхности, аналогичное понятию ориентации кривой.

Пусть Σ—гладкая поверхность. Возьмем на Σ некоторую внутреннюю точку M_0, проведем через нее нормаль к Σ и выберем на этой нормали одно из двух возможных направлений. Это можно сделать, фиксировав определенный единичный вектор $\mathbf{n}$, нормальный к Σ в точке M_0. Проведем теперь на поверхности Σ через точку M_0 какой-либо замкнутый контур C, не имеющий общих точек с границей поверхности, и будем передвигать единичный вектор $\mathbf{n}$ из точки M_0 вдоль C так, чтобы этот вектор все время оставался нормальным к Σ и чтобы его направление менялось при этом передвижении непрерывно. Поскольку вектор $\mathbf{n}$ все время остается нормальным к Σ, то имеются две возможности: 1) при возвращении в точку M_0 вектор $\mathbf{n}$ возвращается в первоначальное положение; 2) в результате обхода по контуру C вектор $\mathbf{n}$ меняет свое направление на противоположное.

Введем следующее

Определение. Гладкая поверхность Σ называется двусторонней, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности Σ и не имеющему общих точек с ее границей, не меняет направления нормали к поверхности.

Если же на поверхности существует замкнутый контур, при обходе по которому направление нормали меняется на противоположное, то поверхность называется односторонней.

Если поверхность Σ двусторонняя, то в каждой ее точке M можно выбрать единичный вектор нормали $\mathbf{n}(M)$ так, чтобы вектор $\mathbf{n}(M)$ зависел от точки M непрерывно. Для построения такой вектор-функции $\mathbf{n}(M)$ возьмем на Σ некоторую начальную точку M_0 и выберем в этой точке один из двух возможных единичных нормальных векторов $\mathbf{n}(M_0)$. После этого возьмем на Σ произвольную точку M, соединим ее с M_0 какой-либо кривой L, лежащей на Σ, и перенесем вдоль L вектор $\mathbf{n}$ из M_0 в M так, чтобы он все время оставался нормальным к поверхности и чтобы его направление при этом переносе менялось непрерывно. Вектор $\mathbf{n}(M)$, полученный таким образом в точке M, не зависит от выбора кривой L, соединяющей точки M_0 и M. Если бы две разные кривые L_1 и L_2 приводили к разным результатам, то, соединив эти кривые в одну, мы получили бы на Σ замкнутый путь C, при обходе по которому направление нормального вектора меняется на противоположное, т. е. эта поверхность не была бы двусторонней.

Из сказанного ясно, что на двусторонней поверхности существуют две и только две такие функции $\mathbf{n}(M)$, непрерывные на всей поверхности Σ. Действительно, каждая такая функция полностью определяется выбором одного из двух возможных направлений нормали в одной точке. Мы будем называть каждую из этих двух функций «*непрерывным полем нормалей*» на Σ. Ясно, что на односторонней поверхности нельзя построить ни одного непрерывного поля нормалей.

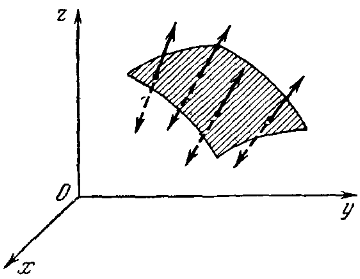

Рис. 5.4.

Выбор на Σ определенного непрерывного поля нормалей мы будем называть выбором стороны этой поверхности.

Примеры. 1. Простейший пример двусторонней поверхности — плоскость. Двусторонней поверхностью будет и любая часть плоскости, например круг.

2. Любая гладкая поверхность, определенная уравнением $z=f(x, y)$, — двусторонняя. Действительно, мы получим одну ее сторону (верхнюю), выбрав в каждой ее точке нормальный вектор так, чтобы он составлял с положительным направлением оси z острый угол, а другую (нижнюю) сторону — при противоположной ориентации нормали (рис. 5.4).

3. Всякая замкнутая поверхность, не имеющая самопересечений, — например сфера, эллипсоид и т. п., — двусторонняя. Направив в каждой точке замкнутой поверхности нормаль внутрь объема, ограниченного поверхностью, мы получим внутреннюю сторону поверхности, а направив нормаль наружу, получим внешнюю сторону.

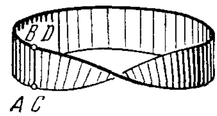

Рис. 5.5.

4. Простейшим примером односторонней поверхности может служить так называемый лист Мёбиуса, изображенный на рис. 5.5. Его можно получить, взяв полоску бумаги $ABCD$ (рис. 5.6, *а*) и склеив ее так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка B — с точкой D, т. е. повернув перед склеиванием один ее край на 180° (рис. 5.6, *б*). Легко видеть, что при обходе листа Мёбиуса по его средней линии направление нормали к нему меняется на противоположное, т. е. эта поверхность действительно является односторонней.

Замечание 1. Двустороннюю поверхность называют также *ориентируемой*, а выбор определенной ее стороны — *ориентацией* поверхности. Односторонние поверхности называют *неориентируемыми*.

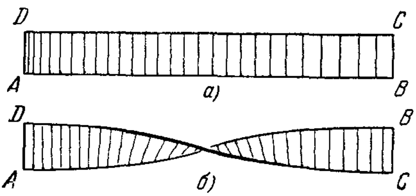

Рис. 5.6.

Читатель должен различать термины «ориентируемая» (сторону можно выбрать) и «ориентированная» (сторона уже выбрана).

Замечание 2. В отличие от таких свойств, как, например, гладкость поверхности, которые могут иметь или не иметь места в отдельных точках (локальные свойства), ориентируемость (или неориентируемость) — это свойство, характеризующее всю поверхность в целом (глобальное свойство). Действительно, на листе Мёбиуса или любой другой поверхности малая окрестность любой точки ориентируема. В каждой такой окрестности можно построить непрерывное поле нормалей, хотя на всем листе Мёбиуса такое поле построить нельзя.

С понятием стороны поверхности тесно связано понятие ориентации ее границы, которое нам понадобится ниже *).

Пусть Σ — ориентированная поверхность, ограниченная одним или несколькими контурами. Определим ориентацию каждого контура L, входящего в состав границы поверхности Σ, согласованную с ориентацией поверхности Σ, по следующему

*) Эта связь существенно зависит от того, к какой координатной системе, правой или левой, отнесено все трехмерное пространство. Мы будем иметь в виду правую систему.

правилу: направление обхода контура L мы считаем **положительным** (согласованным с ориентацией Σ), если наблюдатель, расположенный на поверхности так, что направление вектора нормали совпадает с направлением от ног к голове, обходит контур L, оставляя поверхность Σ все время **слева** от себя (рис. 5.7). Противоположное направление мы считаем **отрицательным**. Если L — произвольный замкнутый контур, ограничивающий какую-либо часть ориентированной поверхности Σ, то направлением обхода этого контура, согласованным с ориентацией поверхности Σ, мы считаем опять-таки то, при котором ограниченная этим контуром часть поверхности Σ (на рис. 5.8 она заштрихована) остается слева *).

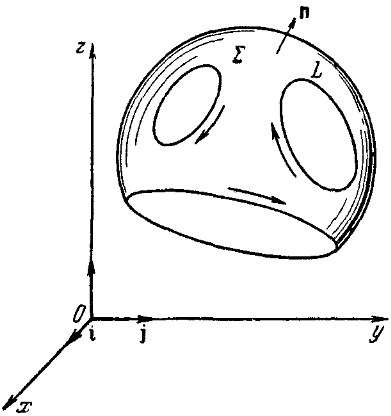

Рис. 5.7.

Если в качестве поверхности Σ взята ориентированная плоскость, то это определение согласованности ориентации контура и поверхности сводится к уже хорошо знакомому читателю правилу, по которому контур считается ориентированным положительно, если его

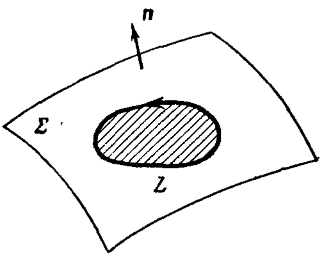

Рис. 5.8.

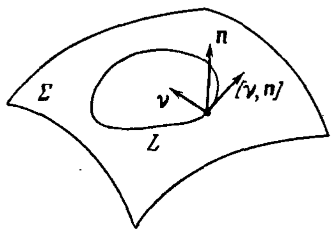

Рис. 5.9.

обход совершается против часовой стрелки, и ориентированным отрицательно в противоположном случае.

Замечание 3. Правило согласования ориентации поверхности Σ и ограничивающего ее контура L можно сформулировать еще следующим образом: пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности Σ в некоторой точке M, принадлежащей L, и пусть

*) Если в пространстве взята **левая** система координат, то согласование противоположное, т. е. **положительно** то направление обхода контура L, при котором поверхность Σ остается **справа**.

$\boldsymbol{\nu}$ — вектор, нормальный к L и к $\mathbf{n}$ и направленный в ту сторону, с которой расположена поверхность Σ. Тогда положительное направление обхода контура L указывается вектором $[\boldsymbol{\nu}, \mathbf{n}]$ *) (рис. 5.9).

2. Определение поверхностного интеграла второго рода. Рассмотрим сначала одну из задач, приводящих к понятию поверхностного интеграла второго рода, а именно, задачу о вычислении потока жидкости через некоторую поверхность.

Пусть пространство заполнено движущейся жидкостью, скорость которой в точке (x, y, z) задается вектором $\mathbf{V}(x, y, z)$ с компонентами $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$. Вычислим количество Π жидкости, протекающей за единицу времени через некоторую ориентированную поверхность Σ.

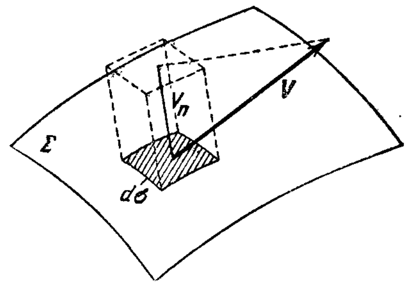

Рис. 5.10.

Рассмотрим бесконечно малый элемент $d\sigma$ поверхности Σ. Количество жидкости, протекающее через $d\sigma$ за единицу времени, равно, очевидно, $d\Pi = V_n\, d\sigma$, где V_n — проекция скорости $\mathbf{V}$ на направление нормали $\mathbf{n}$ к $d\sigma$ (рис. 5.10). Записав V_n как скалярное произведение вектора $\mathbf{V}$ на единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ к $d\sigma$, имеем

$$d\Pi = [P\cos(\mathbf{n}, x) + Q\cos(\mathbf{n}, y) + R\cos(\mathbf{n}, z)]\, d\sigma. \tag{5.13}$$

Это — элемент потока жидкости. Чтобы получить количество жидкости, протекающее через всю поверхность Σ, нужно просуммировать выражения (5.13) по всем элементам $d\sigma$, т. е. взять интеграл

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} [P\cos(\mathbf{n}, x) + Q\cos(\mathbf{n}, y) + R\cos(\mathbf{n}, z)]\, d\sigma.$$

Этот интеграл представляет собой не что иное, как поверхностный интеграл первого рода (в том смысле, как мы определили его в § 1) от выражения

$$P\cos(\mathbf{n}, x) + Q\cos(\mathbf{n}, y) + R\cos(\mathbf{n}, z).$$

Важно, однако, то, что само это выражение зависит не только от вектор-функции (P, Q, R), заданной на поверхности Σ, но и от направления нормали в каждой точке этой поверхности.

---

*) Это правило остается справедливым, независимо от того, к какой системе координат, правой или левой, отнесено все пространство. Направление вектора $\mathbf{n}$ не зависит от системы координат, направление $\boldsymbol{\nu}$ также не зависит. При смене правой системы на левую векторное произведение $[\boldsymbol{\nu}, \mathbf{n}]$ меняет свое направление на противоположное.

Перейдем теперь к общему определению. Пусть Σ — гладкая двусторонняя поверхность. Фиксируем какую-либо определенную сторону этой поверхности (поле нормалей $\mathbf{n}(M)$) и рассмотрим некоторую векторную функцию $\mathbf{A}=(P, Q, R)$, заданную на Σ. Обозначим A_n проекцию вектора $\mathbf{A}$ на направление нормали к Σ в данной точке. Эту проекцию можно записать в виде

$$A_n = P\cos(\mathbf{n}, x) + Q\cos(\mathbf{n}, y) + R\cos(\mathbf{n}, z),$$

где $\cos(\mathbf{n}, x)$, $\cos(\mathbf{n}, y)$ и $\cos(\mathbf{n}, z)$ — косинусы углов между направлением нормали к поверхности и направлениями координатных осей, т. е. компоненты единичного вектора нормали $\mathbf{n}$.

Интеграл

$$\iint_{\Sigma} [P\cos(\mathbf{n}, x) + Q\cos(\mathbf{n}, y) + R\cos(\mathbf{n}, z)]\, d\sigma \tag{5.14}$$

мы назовем поверхностным интегралом второго рода от вектор-функции $\mathbf{A}=(P, Q, R)$ *по поверхности* Σ (точнее говоря, по *выбранной стороне* поверхности Σ) и будем обозначать

$$\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Таким образом, по определению

$$\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$
$$= \iint_{\Sigma} [P\cos(\mathbf{n}, x) + Q\cos(\mathbf{n}, y) + R\cos(\mathbf{n}, z)]\, d\sigma. \tag{5.15}$$

При переходе к другой стороне поверхности компоненты единичного вектора нормали, а следовательно, и сам интеграл (5.14), меняют свой знак на противоположный. *Для односторонней поверхности понятие поверхностного интеграла второго рода не вводится.*

Для того чтобы понятие поверхностного интеграла приобрело общность, необходимую для приложений, приходится рассматривать интегралы и по таким поверхностям, которые имеют самопересечения (с аналогичной ситуацией мы уже встречались в теории криволинейных интегралов).

Замечание 1. Если $d\sigma$ — бесконечно малый элемент площади поверхности, то выражения

$$\cos(\mathbf{n}, x)\, d\sigma,\quad \cos(\mathbf{n}, y)\, d\sigma,\quad \cos(\mathbf{n}, z)\, d\sigma$$

представляют собой проекции элемента $d\sigma$ на плоскости yz, zx и xy (рис. 5.11), поэтому мы и обозначаем их $dy\,dz$, $dz\,dx$ и $dx\,dy$ соответственно.

Замечание 2. Мы определили поверхностный интеграл второго рода, опираясь на понятие поверхностного интеграла первого рода.

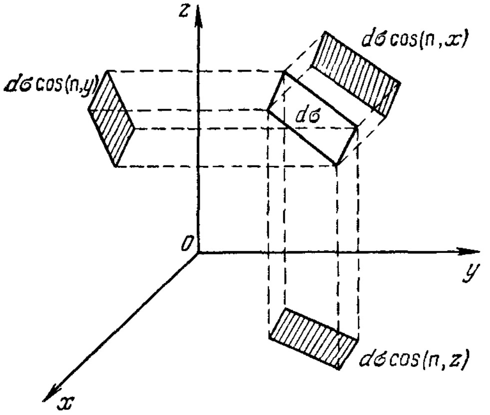

Рис. 5.11.

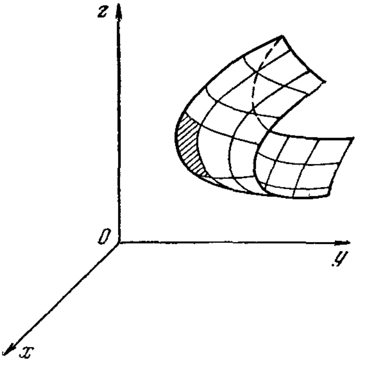

Рис. 5.12.

Однако интеграл второго рода можно определить и непосредственно, с помощью соответствующих интегральных сумм, а именно, следующим образом:

Будем для сокращения записи рассматривать только одну компоненту вектора (P, Q, R), скажем R. Возьмем некоторую гладкую ориентированную поверхность Σ и рассмотрим разбиение этой поверхности на части Σ_i. Взяв в каждой их этих частей произвольную точку (x_i, y_i, z_i), составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\, S_i, \tag{5.16}$$

где S_i — проекция Σ_i на плоскость xy. При этом величину S_i мы будем считать положительной, если в точках, принадлежащих Σ_i, нормаль к поверхности образует с положительным направлением оси z острый угол, и отрицательной, если в каждой точке элемента Σ_i этот угол тупой *). Нетрудно проверить, что

*) В разбиение поверхности Σ могут входить еще и «неправильные» элементы, т. е. такие, что в некоторых их точках угол $(\mathbf{n}, z)$ острый, а в некоторых — тупой (рис. 5.12). Можно или избегать разбиений, содержащих такие элементы, или приписывать таким элементам произвольный знак. Это не влияет на результат, поскольку сумма площадей проекций таких элементов мала.

для непрерывной функции $R(x, y, z)$ и гладкой поверхности Σ предел интегральных сумм (5.16) при неограниченном измельчении разбиения поверхности существует и равен

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,dx\,dy$$

(ср. с определением криволинейного интеграла второго рода в п. 2 § 2 гл. 4).

Аналогичным образом можно определить через интегральные суммы и интегралы

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)\,dy\,dz \quad \text{и} \quad \iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\,dz\,dx,$$

а следовательно, и интеграл общего вида

$$\iint_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

— сумму интегралов этих трех типов.

Замечание 3. Отличие поверхностного интеграла второго рода от интеграла первого рода состоит, по существу, в том, что в интеграле второго рода элемент площади $d\sigma$ рассматривается не как скалярная величина, а как вектор $d\boldsymbol{\sigma}$, направленный по нормали к поверхности и имеющий компоненты:

$$d\sigma\cos(\mathbf{n}, x), \quad d\sigma\cos(\mathbf{n}, y), \quad d\sigma\cos(\mathbf{n}, z).$$

В соответствии с этим поверхностный интеграл второго рода от векторной функции $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ часто записывают в виде

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{A}, d\boldsymbol{\sigma}), \tag{5.17}$$

что равносильно записи

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{A}, \mathbf{n})\,d\sigma. \tag{5.18}$$

Замечание 4. Наряду с интегралами вида (5.18) в некоторых задачах приходится рассматривать интегралы вида

$$\iint_{\Sigma} [\mathbf{A}, \mathbf{n}]\,d\sigma. \tag{5.19}$$

Значение такого интеграла представляет собой уже не скаляр, а вектор. Его вычисление сводится, очевидно, к покомпонентному интегрированию вектора $[\mathbf{A}, \mathbf{n}]$. Так как здесь подынтегральное выражение зависит и от нормали $\mathbf{n}$ к поверхности Σ, то интеграл (5.19) естественно рассматривать как поверхностный интеграл второго рода (но только «векторный», в отличие от «скалярного» интеграла (5.18)).

3. Сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу. Из определения поверхностного интеграла второго рода и теоремы 5.1 сразу вытекает следующий результат:

Пусть гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность Σ *задана уравнением*

$$z = z(x, y)$$

(причем берется верхняя сторона этой поверхности) *и* $R(x, y, z)$ — *некоторая ограниченная функция на* Σ. *Тогда*

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)\, dx\, dy \doteq \iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y))\, dx\, dy, \qquad (5.20)$$

где D — проекция поверхности Σ на плоскость xy; *входящий в это равенство поверхностный интеграл существует, если существует стоящий справа двойной интеграл.*

Действительно, рассматриваемый поверхностный интеграл можно переписать в виде

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, z)\, d\sigma.$$

Применив к нему формулу (5.9), немедленно получаем требуемое равенство. Таким образом, *для того чтобы поверхностный интеграл* $\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)\, d\sigma$, *взятый по верхней стороне поверхности* Σ, *определенной уравнением* $z = z(x, y)$, *преобразовать в двойной, следует в подынтегральную функцию вместо* z *подставить соответствующую функцию* $z(x, y)$, *а интегрирование по поверхности* Σ *заменить интегрированием по ее проекции* D *на плоскость* xy.

Если же интеграл берется по нижней стороне поверхности Σ, то

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)\, dx\, dy = -\iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y))\, dx\, dy.$$

Аналогично получаются формулы

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)\, dy\, dz = \pm \iint\limits_{D_1} P(x(y, z), y, z)\, dy\, dz \qquad (5.21)$$

и

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x, y, z)\, dz\, dx = \pm \iint\limits_{D_2} Q(x, y(z, x), z)\, dz\, dx, \qquad (5.22)$$

где в первом случае под Σ понимается поверхность, заданная уравнением $x = x(y, z)$, а во втором — поверхность, заданная уравнением $y = y(z, x)$. Знак плюс берется в том случае, когда нормаль к поверхности образует с осью x (соответственно с осью y) острый угол, а знак минус, когда этот угол тупой. D_1 и D_2 — проекции поверхности Σ на плоскости yz и zx соответственно.

Формулой типа (5.20) можно воспользоваться для сведения поверхностного интеграла к двойному и в том случае, когда ориентированная поверхность Σ состоит из нескольких кусков, каждый из которых определяется уравнением вида $z = z(x, y)$. В этом случае рассматриваемый интеграл следует представить как сумму интегралов, отвечающих этим кускам, и затем к каждому из этих слагаемых применить формулу (5.20).

Упражнение. Интеграл

$$J = \iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

взятый по внешней стороне сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

записать в виде суммы двойных интегралов.

Ответ.

$$J = \iint_{x^2+y^2 \leqslant a^2} R\left(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right) dx\,dy - \\ - \iint_{x^2+y^2 \leqslant a^2} R\left(x, y, -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right) dx\,dy.$$

(Первое слагаемое равно интегралу, взятому по верхней стороне верхней полусферы, а второе, *вместе со знаком минус*, равно интегралу, взятому по нижней стороне нижней полусферы. Две таким образом ориентированные полусферы составляют вместе внешнюю сторону полной сферы.)

Мы показали, как сводится к двойному интегралу поверхностный интеграл второго рода, взятый по поверхности, заданной уравнением в декартовых координатах. Для поверхности, заданной параметрическим уравнением, применение теоремы 5.1′ сразу дает следующий результат: *если гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность* Σ *задана параметрическим уравнением*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

и (P, Q, R) — ограниченная вектор-функция, определенная на Σ, то

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{D}[P\cos(\mathbf{n},x)+Q\cos(\mathbf{n},y)+R\cos(\mathbf{n},z)]\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv, \tag{5.23}$$

где D — область изменения параметров u и v, а g_{11}, g_{12} и g_{22} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Σ; входящий в это равенство поверхностный интеграл существует, если существует стоящий справа двойной интеграл.

Формулу (5.23) можно записать несколько иначе. Известно, что (см. п. 5 § 3 гл. 3)

$$\cos(\mathbf{n},x)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos(\mathbf{n},y)=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos(\mathbf{n},z)=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{5.24}$$

где

$$A=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

и что

$$\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Поэтому формулу (5.23) можно записать так:

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint\limits_{D}[PA+QB+RC]\,du\,dv, \tag{5.25}$$

где

$$P=P(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

и аналогично для Q и R.

Ясно, что равенства (5.20) — (5.22) представляют собой частные случаи общей формулы (5.23).

§ 3. Формула Остроградского

1. Вывод формулы Остроградского. В предыдущей главе мы вывели формулу, связывающую двойной интеграл по некоторой плоской области, с криволинейным интегралом, взятым по ее границе (*формула Грина*). Сейчас мы установим аналогичную формулу,