и (P, Q, R) — ограниченная вектор-функция, определенная на Σ, то

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$
$$= \iint\limits_{D} [P\cos(\mathbf{n}, x) + Q\cos(\mathbf{n}, y) + R\cos(\mathbf{n}, z)]\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du\,dv, \tag{5.23}$$

где D — область изменения параметров u и v, а g_{11}, g_{12} и g_{22} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Σ; входящий в это равенство поверхностный интеграл существует, если существует стоящий справа двойной интеграл.

Формулу (5.23) можно записать несколько иначе. Известно, что (см. п. 5 § 3 гл. 3)

$$\cos(\mathbf{n}, x) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos(\mathbf{n}, y) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\cos(\mathbf{n}, z) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{5.24}$$

где

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

и что

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Поэтому формулу (5.23) можно записать так:

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{D} [PA + QB + RC]\,du\,dv, \tag{5.25}$$

где

$$P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

и аналогично для Q и R.

Ясно, что равенства (5.20) — (5.22) представляют собой частные случаи общей формулы (5.23).

§ 3. Формула Остроградского

1. Вывод формулы Остроградского. В предыдущей главе мы вывели формулу, связывающую двойной интеграл по некоторой плоской области, с криволинейным интегралом, взятым по ее границе (*формула Грина*). Сейчас мы установим аналогичную формулу, связывающую тройной интеграл по пространственной области с поверхностным интегралом, взятым по внешней стороне поверхности, ограничивающей эту область. Эта формула называется *формулой Остроградского* *).

Введем для удобства следующие термины. Пространственную область V, ограниченную двумя кусочно-гладкими поверхностями Σ_1 и Σ_2, заданными уравнениями

$$z = z_1(x, y) \quad \text{и} \quad z = z_2(x, y), \tag{5.26}$$

и боковой цилиндрической поверхностью Σ_3 с образующими, параллельными оси z, мы назовем *областью, цилиндрической вдоль оси* z или, короче, «z*-цилиндрической*». Поверхности $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ назовем ее криволинейными основаниями, нижним и верхним **) (рис. 5.13). Аналогично область, ограниченную кусочно-гладкими поверхностями

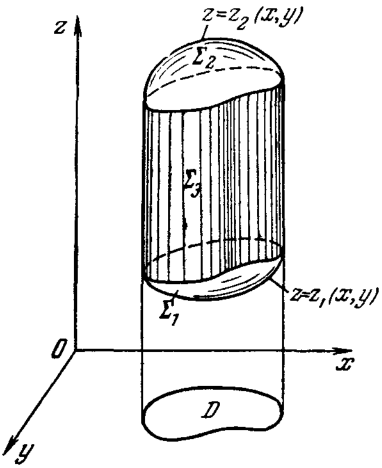

Рис. 5.13.

$$x = x_1(y, z) \text{ и } x = x_2(y, z)$$

и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси x, назовем «x-цилиндрической». Так же определяются и «y-цилиндрические» области.

Назовем, наконец, область V *простой*, если ее можно разбить как на конечное число z-цилиндрических областей, так и на конечное число областей каждого из двух остальных типов.

Пусть V — некоторая z-цилиндрическая область с основаниями Σ_1, Σ_2, заданными уравнениями (5.26) и боковой поверхностью Σ_3. Соединение этих трех поверхностей, т. е. всю границу области V, обозначим Σ. При этом мы будем рассматривать внешнюю сторону поверхности Σ. Возьмем функцию $R(x, y, z)$, определенную и непре-

*) М. В. Остроградский опубликовал эту формулу в 1828 г. в работе «Заметка о теории тепла». Часто ее называют также формулой Гаусса, однако Гауссом эта формула была получена значительно позже, в 1841 г.

**) Боковая поверхность Σ может отсутствовать. Например, шар мы считаем z-цилиндрической областью, основания которой суть Σ_1 — нижняя полусфера и Σ_2 — верхняя полусфера, а боковая поверхность Σ_3 выродилась в экватор (шар является также и областью, цилиндрической вдоль осей x и y).

рывную вместе со своей частной производной $\frac{\partial R}{\partial z}$ в области V (включая ее границу), и рассмотрим очевидное равенство

$$\int\limits_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz = R(x,\ y,\ z_2(x,\ y)) - R(x,\ y,\ z_1(x,\ y)).$$

Проинтегрируем это равенство по области D, представляющей собой проекцию V на плоскость $(x,\ y)$, заменяя повторный интеграл тройным:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_D R(x,\ y,\ z_2(x,\ y))\, dx\, dy - \\ - \iint\limits_D R(x,\ y,\ z_1(x,\ y))\, dx\, dy. \quad (5.27)$$

Первый из стоящих справа интегралов можно записать (см. формулу (5.20)) в виде поверхностного интеграла от функции $R(x,\ y,\ z)$, взятого по верхней стороне поверхности

$$z = z_2(x,\ y).$$

Аналогично второй из этих интегралов можно рассматривать как поверхностный интеграл от той же функции $R(x,\ y,\ z)$, взятый по верхней стороне поверхности $z = z_1(x,\ y)$, или как интеграл по нижней стороне той же поверхности $z = z_1(x,\ y)$, взятый с обратным знаком. Таким образом, мы получим

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\Sigma_2} R\, dx\, dy + \iint\limits_{\Sigma_1} R\, dx\, dy, \quad (5.28)$$

где первый из стоящих справа интегралов берется по верхней стороне поверхности Σ_2, а второй — по нижней стороне поверхности Σ_1. Прибавив к правой части формулы (5.28) интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma_3} R\, dx\, dy$$

(равный, очевидно, нулю), взятый по внешней стороне боковой поверхности Σ_3, мы получим справа поверхностный интеграл, взятый по внешней стороне всей поверхности Σ, ограничивающей область V. Таким образом, мы получаем следующее равенство:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\Sigma} R\, dx\, dy = \iint\limits_{\Sigma} R \cos(\mathbf{n},\ z)\, d\sigma. \quad (5.29)$$

Равенство (5.29) справедливо и для любой области V, которую можно разбить на конечное число z-цилиндрических частей. Действительно, разобьем V на такие части V_i, напишем для каждой из них равенство вида (5.29) и просуммируем эти равенства. Слева мы получим тройной интеграл, взятый по всей области V, а справа — сумму поверхностных интегралов, взятых по частям поверхности Σ, ограничивающей V, и по тем поверхностям, с помощью которых V разбивается на части V_i, причем по каждой из этих последних интеграл берется дважды, один раз по одной ее стороне, а второй раз — по другой. Поэтому в результате суммирования все интегралы, взятые по разделяющим поверхностям, взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\Sigma R\,dx\,dy. \tag{5.30}$$

Пусть теперь V — область, цилиндрическая вдоль оси x, т. е. ограниченная кусочно-гладкими поверхностями-основаниями

$$x = x_1(y_1, z), \quad x = x_2(y, z)$$

и боковой цилиндрической поверхностью, а $P(x, y, z)$ — функция, непрерывная вместе со своей производной $\frac{\partial P}{\partial x}$ в области V (включая ее границу). Рассуждения, аналогичные проведенным выше, приводят к равенству

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\Sigma P\,dy\,dz, \tag{5.31}$$

которое остается в силе и тогда, когда V состоит из конечного числа x-цилиндрических частей.

Аналогично получается и равенство

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\Sigma Q\,dz\,dx, \tag{5.32}$$

справедливое для всякой области V, которую можно разбить на конечное число y-цилиндрических областей.

Пусть, наконец, V — некоторая простая область и пусть функции P, Q, R вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в этой области всюду, включая ее границу (т. е. непрерывны в замкнутой области). Тогда справедливы все три равенства: (5.30), (5.31) и (5.32). Сложив их, получаем

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_\Sigma P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \qquad (5.33)$$

или, в других обозначениях,

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Sigma [P\cos(\mathbf{n},\ x)+Q\cos(\mathbf{n},\ y)+R\cos(\mathbf{n},\ z)]\,d\sigma. \qquad (5.33')$$

Это и есть *формула Остроградского.*

Замечание. При выводе формулы Остроградского мы считали, что функции P, Q, R и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны (а следовательно, и ограничены) в замкнутой простой области. Применив те же рассуждения, что и для формулы Грина (см. замечание 1 § 3 гл. 4), можно доказать справедливость формулы Остроградского при следующих более общих условиях:

1. V — ограниченная область, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

2. Функции $P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$ и $R(x,\ y,\ z)$ непрерывны, а следовательно, н ограничены в замкнутой области V.

3. Производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ существуют и непрерывны внутри области V (без границы) и интеграл $\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$ существует (быть может, как несобственный интеграл *)).

2. Вычисление поверхностных интегралов с помощью формулы Остроградского. Представление объема пространственной области в виде поверхностного интеграла. Выше мы показали (формула (5.10)), как поверхностный интеграл второго рода свести к двойному. Однако для фактического вычисления поверхностного интеграла этот путь не всегда самый удобный. В частности, интеграл по замкнутой поверхности иногда удобнее сводить к тройному по формуле Остроградского.

Примеры. 1. Вычислить интеграл

$$J = \iint\limits_\Sigma x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy,$$

взятый по сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$.

---

*) О несобственных кратных интегралах см. гл. 9.

Решение. Воспользовавшись формулой Остроградского, будем иметь

$$J = 3 \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

откуда, введя сферические координаты, получаем

$$J = 3 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{a} r^4 \sin\theta\,dr = \frac{4}{5}\pi a^5.$$

2. Вычислить интеграл

$$J = \iint\limits_{\Sigma} z\,dy\,dz + x\,dz\,dx + y\,dx\,dy,$$

взятый по некоторой замкнутой поверхности Σ.

Решение. По формуле Остроградского рассматриваемый интеграл сводится к тройному, под знаком которого стоит тождественный нуль. Следовательно, $J = 0$, какова бы ни была замкнутая поверхность Σ.

В предыдущей главе мы видели, что формула Грина дает, в частности, выражение для площади области через криволинейный интеграл по ее границе (см. (4.47)). Точно так же и из формулы Остроградского легко получить выражение для объема области в виде поверхностного интеграла по замкнутой поверхности Σ — границе этой области. Действительно, подберем функции P, Q и R так, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1.$$

Тогда получим

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz = V,$$

где V — объем, ограниченный поверхностью Σ. Интеграл здесь берется по внешней стороне Σ. В частности, положив

$$P = \frac{1}{3}x, \quad Q = \frac{1}{3}y, \quad R = \frac{1}{3}z,$$

мы получим для вычисления объема удобную формулу

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy. \tag{5.34}$$