§ 4. Формула Стокса

1. Вывод формулы Стокса. В этом параграфе мы выведем так называемую формулу Стокса, связывающую поверхностные интегралы с криволинейными. Формула Стокса обобщает формулу Грина и переходит в нее, если рассматриваемая поверхность сводится к плоской области, лежащей в плоскости xy. Подобно формулам Грина и Остроградского, формула Стокса широко применяется как в самом анализе, так и в его приложениях.

Пусть дана гладкая ориентированная поверхность Σ, ограниченная ориентированным контуром Λ (ориентации Σ и Λ согласованы, см. п. 1 § 2), и пусть в некоторой трехмерной области, содержащей внутри себя поверхность Σ, определена векторная функция (P, Q, R), такая, что P, Q и R непрерывны в этой области вместе со своими частными производными первого порядка.

Постараемся преобразовать криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Lambda} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \qquad (5.35)$$

взятый по контуру Λ, в интеграл по поверхности Σ.

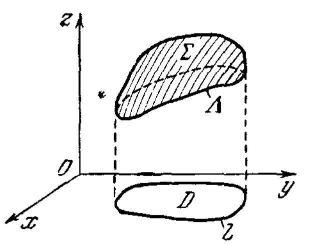

Рис. 5.14.

Рассмотрим сначала случай, когда поверхность Σ задана уравнением

$$z = z(x, y)$$

в декартовых координатах. Обозначим D проекцию поверхности Σ на плоскость xy, и пусть L — граница области D, т. е. проекция контура Λ (рис. 5.14). Преобразование криволинейного интеграла (5.35) в поверхностный мы проведем по следующей схеме:

$$\int\limits_{\Lambda} \to \int\limits_{L} \to \iint\limits_{D} \to \iint\limits_{\Sigma},$$

т. е. криволинейный интеграл по пространственному контуру Λ преобразуем сперва в криволинейный интеграл по плоскому контуру L, затем (с помощью формулы Грина) переведем его в двойной интеграл по области D и, наконец, этот последний преобразуем в поверхностный интеграл по Σ.

Проведем теперь соответствующие выкладки. Рассмотрим сначала интеграл вида

$$J_1 = \int\limits_{\Lambda} P\,dx.$$

Заметим прежде всего, что

$$J_1=\int_{\Lambda} P(x,\ y,\ z)\,dx=\int_{L} P(x,\ y,\ z(x,\ y))\,dx,$$

поскольку контур Λ лежит на поверхности Σ, заданной уравнением $z=z(x,\ y)$. Далее, применив формулу Грина, получаем

$$J_1=\int_{L} P(x,\ y,\ z(x,\ y))\,dx=-\int_{D}\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (5.36)$$

(здесь P — сложная функция от x и y, и мы учли это при вычислении производной от P по y).

Воспользовавшись выражениями для направляющих косинусов нормали (см. (3.36)), получаем, что

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos(\mathbf{n},\ y)}{\cos(\mathbf{n},\ z)}.$$

Поэтому

$$J_1=-\int_{D}\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos(\mathbf{n},\ y)}{\cos(\mathbf{n},\ z)}\right)dx\,dy.$$

Теперь, воспользовавшись формулой (5.20), мы можем этот двойной интеграл преобразовать в поверхностный. Получаем

$$J_1=-\int_{\Sigma}\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos(\mathbf{n},\ y)}{\cos(\mathbf{n},\ z)}\right)\cos(\mathbf{n},\ z)\,d\sigma=$$

$$=-\int_{\Sigma}\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos(\mathbf{n},\ z)-\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\mathbf{n},\ y)\right)d\sigma.$$

Итак,

$$\int_{\Lambda} P\,dx=\int_{\Sigma}\int\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\mathbf{n},\ y)-\frac{\partial P}{\partial y}\cos(\mathbf{n},\ z)\right)d\sigma. \qquad (5.37)$$

Мы предполагали, что поверхность Σ задана уравнением $z=z(x,\ y)$. Тот же результат можно было получить, предположив, что Σ задана уравнением $y=y(z,\ x)$. Для этого нужно было бы рассмотреть проекцию Σ на плоскость zx (вместо xy) и провести рассуждения, аналогичные изложенным выше. Далее, если Σ — часть плоскости, перпендикулярной оси x (тогда Σ нельзя однозначно спроектировать ни на плоскость xy, ни на плоскость zx), то равенство (5.37) верно тривиальным образом: и правая и левая его части будут равны нулю (проверьте это!). Наконец, стандартные рассуждения, которыми мы уже пользовались при выводе формул Грина и Остроградского, показывают, что если поверхность Σ состоит из конечного числа частей, для каждой из которых верно равенство (5.37), то оно верно и для всей поверхности Σ. Таким образом, равенство (5.37) установлено для поверхности, состоящей из конечного числа кусков перечисленных выше типов. В точности так же получаются два аналогичных равенства:

$$\int\limits_{\Lambda} Q\,dy = \int\limits_{\Sigma}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(\mathbf{n},\ z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos(\mathbf{n},\ x)\right) d\sigma, \tag{5.38}$$

$$\int\limits_{\Lambda} R\,dz = \int\limits_{\Sigma}\int \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos(\mathbf{n},\ x) - \frac{\partial R}{\partial x}\cos(\mathbf{n},\ y)\right) d\sigma. \tag{5.39}$$

Складывая все эти три равенства, получаем

$$\int\limits_{\Lambda} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\Sigma}\int \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(\mathbf{n},\ z) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(\mathbf{n},\ x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(\mathbf{n},\ y)\right] d\sigma. \tag{5.40}$$

Это и есть *формула Стокса*. Ее можно переписать в следующем виде:

$$\int\limits_{\Lambda} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\Sigma}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx. \tag{5.41}$$

Формулу Стокса легко запомнить, заметив, что первое слагаемое в правой ее части — это то же самое выражение, которое стоит под знаком двойного интеграла в формуле Грина, а второе и третье получаются из него циклической перестановкой координат x, y, z и функций P, Q, R.

Если поверхность Σ сводится к плоской области, лежащей в плоскости xy, то интегралы по $dz\,dx$ и $dy\,dz$ обращаются в нуль и формула Стокса переходит в формулу Грина.

Замечание 1. При выводе формулы Стокса мы пользовались декартовой системой координат. Но ни криволинейный, ни поверхностный интегралы, входящие в эту формулу, не зависят от способа задания поверхности Σ и ее границы Λ. Поэтому формула Стокса остается в силе и при любом другом способе задания поверхности, например с помощью параметрического уравнения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,\ v).$$

Замечание 2. Формула Стокса остается в силе и в том случае, когда граница Λ поверхности Σ состоит из нескольких отдельных контуров. В этом случае под $\int\limits_{\Lambda} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ следует понимать сумму интегралов, взятых по этим контурам, причем ориентация каждого из этих контуров опять-таки должна быть согласована с выбором стороны поверхности Σ. Например, если Σ представляет собой боковую поверхность цилиндра с вырезанным в ней отверстием (рис. 5.15) и мы рассматриваем внешнюю сторону этой поверхности, то формула Стокса связывает интеграл по Σ с криволинейным интегралом, взятым по трем контурам, образующим ее границу и ориентированным так, как это показано стрелками на рис. 5.15.

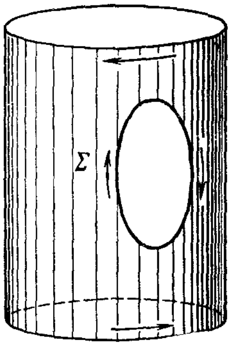

Рис. 5.15.

2. Применение формулы Стокса к исследованию пространственных криволинейных интегралов. Формула Стокса имеет многочисленные применения, и мы еще вернемся к ней в следующей главе. Сейчас мы воспользуемся этой формулой для того, чтобы перенести на пространственные криволинейные интегралы те результаты об условиях независимости криволинейного интеграла от пути, которые в § 4 гл. 4 были получены (с помощью формулы Грина) для плоского случая.

Введем следующее

Определение. *Трехмерная область V называется поверхностно односвязной*), если на любой замкнутый контур, лежащий в V, можно натянуть поверхность, также целиком лежащую в V* (т. е. если внутри V найдется поверхность, имеющая этот контур своей границей).

Примерами поверхностно односвязных областей являются: шар, все пространство, область, заключенная между двумя концентрическими сферами, и т. п. Примером неодносвязной области может служить шар, сквозь который проходит цилиндрический туннель (рис. 5.16).

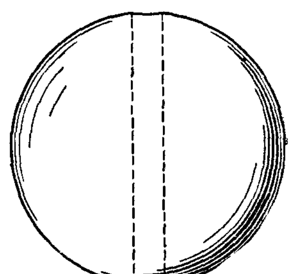

Рис. 5.16.

Установим теперь следующий результат, аналогичный теореме 4.5.

Теорема 5.2. *Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными*

*) Или, короче, просто «односвязной».

производными первого порядка в некоторой замкнутой ограниченной поверхностно односвязной области V, то следующие четыре утверждения равносильны между собой:

1. *Интеграл* $\oint P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, *взятый по любому замкнутому контуру, лежащему внутри V, равен нулю.*

2. $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *не зависит от выбора пути, соединяющего точки A и B.*

3. $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ — *полный дифференциал некоторой однозначной функции, определенной в V.*

4. *Выполняются равенства*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{5.42}$$

Доказательство этой теоремы, по существу, не отличается от доказательства теоремы 4.5 и проводится по той же схеме $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$. Мы предоставим его читателю, ограничившись лишь следующим указанием: для того чтобы из условия 4) получить условие 1), рассмотрим некоторый замкнутый контур Λ, лежащий в V; так как область V по условию односвязна, то на Λ можно натянуть поверхность Σ, целиком лежащую внутри V. Применив к криволинейному интегралу, взятому по Λ, формулу Стокса, получаем, что из условия (5.42) следует равенство

$$\int\limits_{\Lambda} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Если выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$, то нетрудно написать явное выражение этой функции:

$$U(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + C, \tag{5.43}$$

аналогичное формуле (4.50), установленной в § 4 гл. 4 для двух переменных.

$\Bigg($Здесь $\int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)}$ означает интеграл, взятый по произвольному пути, целиком лежащему в области V и соединяющему точку (x_0, y_0, z_0) с (x, y, z).$\Bigg)$

Если функции P, Q и R удовлетворяют условиям (5.42), но область, в которой они определены, не односвязна, то свойства интеграла

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

аналогичны свойствам криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ в плоской многосвязной области. В частности, выражение (5.43) при выполнении равенств (5.42) и в случае многосвязной области представляет собой функцию, полный дифференциал которой равен $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, но в многосвязной области эта функция, вообще говоря, многозначна.