ГЛАВА 6

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики. В этой главе мы изложим элементы того математического аппарата, которым приходится пользоваться при изучении физических полей.

В физических задачах чаще всего встречаются величины двух типов: скаляры и векторы *). В соответствии с этим мы будем рассматривать два типа полей — скалярные и векторные.

§ 1. Скалярные поля

1. Определение и примеры скалярных полей. Пусть Ω — некоторая область в пространстве. Мы говорим, что *в этой области задано скалярное поле, если каждой точке M этой области поставлено в соответствие некоторое число $U(M)$.*

Примерами скалярных полей могут служить поле температур внутри некоторого нагретого тела (в каждой точке M этого тела задана соответствующая температура $U(M)$), поле освещенности, создаваемое каким-либо источником света, и т. д.

Важным примером скалярного поля служит поле плотности массы, с которым мы уже встречались. Напомним это понятие. Пусть некоторая пространственная область Ω заполнена непрерывно распределенной массой. Сопоставив каждой области V, содержащейся в Ω, ту массу, которая находится в области V, мы получим аддитивную функцию области $\mu(V)$. Если в каждой точке существует производная от $\mu(V)$ по объему, то эта производная называется плотностью

---

*) Это, собственно говоря, верно лишь применительно к более элементарным вопросам физики. В ряде разделов теоретической физики — электродинамике, теории относительности, теории элементарных частиц и т. д. существенную роль играют величины более сложной природы, чем скаляры и векторы. Об одном важном типе таких величин — так называемых *тензорах* — будет идти речь в следующей главе.

массы, а значения этой производной образуют скалярное поле, называемое полем плотности массы. Аналогично, рассматривая некоторое непрерывное распределение зарядов по пространственной области Ω, мы приходим к скалярному полю плотности электрического заряда. Число подобных примеров можно было бы увеличить.

Наряду с полями, заданными в пространственных областях, часто приходится рассматривать и плоские скалярные поля. Примером такого поля может служить освещенность части плоскости, создаваемая каким-либо источником света.

2. Поверхности и линии уровня. Если $U(M)$ — некоторое скалярное поле, то, введя в области, где задано поле, декартовы координаты, можно представить это поле в виде функции $U(x, y, z)$ координат точки M *). Эту функцию мы всегда будем в дальнейшем предполагать непрерывной и имеющей в рассматриваемой области непрерывные частные производные первого порядка по x, y и z.

Задание скалярного поля с помощью фиксированной системы координат и соответствующей функции $U(x, y, z)$ не всегда дает достаточно ясное представление о поведении этого поля. Для получения более наглядной картины удобно пользоваться так называемыми поверхностями уровня. *Поверхностью уровня скалярного поля $U(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле $U(M)$ имеет данное фиксированное значение C.* Уравнение поверхности уровня имеет вид **)

$$U(x, y, z) = C. \tag{6.1}$$

Ясно, что поверхности уровня (отвечающие различным C) заполняют всю область, в которой определено поле, и никакие две поверхности

$$U(x, y, z) = C_1 \quad \text{и} \quad U(x, y, z) = C_2$$

не имеют общих точек. Задание всех поверхностей уровня с отмет-

---

*) Вид этой функции зависит, конечно, не только от рассматриваемого поля, но и от выбора системы координат. Но если система координат считается *фиксированной*, то понятие скалярного поля просто совпадает с понятием функции трех переменных. Мы, однако, будем все время пользоваться термином «поле», подчеркивая этим, что речь идет здесь, как правило, о величинах, имеющих непосредственный физический смысл, не связанный с выбором той или иной системы координат.

**) При сделанных выше предположениях относительно функции $U(x, y, z)$ такое уравнение действительно определяет некоторую гладкую поверхность, если только точки, удовлетворяющие равенству (6.1) (при данном C), вообще существуют и если в этих точках производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ не обращаются в нуль одновременно (см. вып. 1, гл. 14, § 4).

кой на них соответствующих значений C равносильно заданию самого поля $U(M)$. Взаимное расположение поверхностей уровня в пространстве дает наглядное представление о соответствующем скалярном поле.

Указанный способ изображения поля особенно удобен тогда, когда речь идет о поле, заданном не в пространственной, а в плоской области. Такое поле описывается функцией двух переменных $U(x, y)$. Равенство вида $U(x, y)=C$ определяет, вообще говоря, некоторую кривую. Такие кривые называются *линиями уровня* плоского скалярного поля $U(M)$. С помощью линий уровня обычно изображается рельеф местности на топографических картах, а именно, на них проводятся линии, состоящие из точек, имеющих одну и ту же высоту над уровнем моря; эти линии называются горизонталями (рис. 6.1).

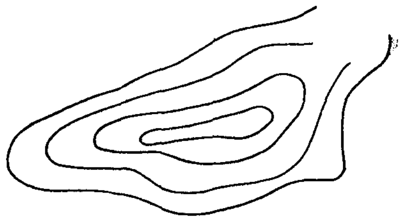

Рис. 6.1.

Распределение температур, давлений, количества осадков и т. п. обычно также изображается на специальных картах с помощью соответствующих линий уровня (называемых изотермами в случае температур, изобарами, когда речь идет о давлениях, и т. д.).

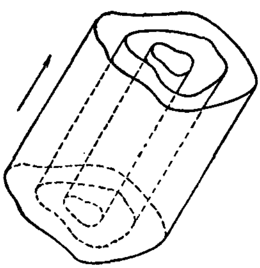

Рис. 6.2.

3. Различные типы симметрии полей. Во многих физических задачах приходится иметь дело с полями, обладающими теми или иными специальными свойствами симметрии, облегчающими изучение таких полей. Укажем некоторые частные случаи.

а) *Плоскопараллельное поле.* Если скалярное поле $U(M)$ в какой-либо декартовой системе координат можно описать функцией, зависящей не от трех, а только от двух координат, скажем, функцией вида $U(x, y)$, то такое поле называется *плоскопараллельным* (или *двумерным*). Иначе говоря, поле $U(M)$ называется плоскопараллельным, если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле $U(M)$ переходит само в себя. Поверхности уровня такого поля — это семейство цилиндрических поверхностей (рис. 6.2); в соответствующим образом выбранной системе координат они задаются уравнениями вида $U(x, y)=C$.

б) *Осесимметрическое поле.* Если для поля $U(M)$ можно подобрать такую цилиндрическую систему координат, в которой оно изображается функцией, зависящей только от переменных

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ и z (но не от угла φ), то это поле называется *осесимметрическим*. Иначе говоря, поле $U(M)$ осесимметрическое, если оно переходит само в себя при повороте пространства (на произвольный угол) вокруг некоторой фиксированной прямой — оси симметрии этого поля. Поверхности уровня такого поля представляют собой, очевидно, поверхности вращения (рис. 6.3). Если эти

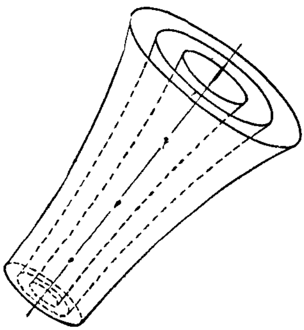

Рис. 6.3.

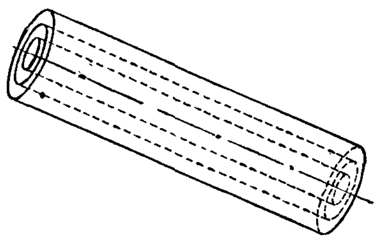

Рис. 6.4.

поверхности вращения — круглые цилиндры (рис. 6.4), т. е. если поле $U(M)$ в соответствующей цилиндрической системе координат изображается функцией, зависящей лишь от одной координаты r (расстояния точки от оси симметрии поля), то $U(M)$ называется *цилиндрическим* полем.

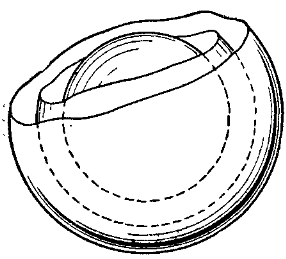

Рис. 6.5.

в) *Сферическое поле.* Если значения $U(M)$ зависят лишь от расстояния точки M от некоторой фиксированной точки M_0, то такое поле называется *сферическим*. Поверхности уровня сферического поля — семейство концентрических сфер (рис. 6.5).

4. Производная по направлению. При изучении скалярного поля методами анализа мы должны в первую очередь описать его локальные свойства, т. е. изменение величины $U(M)$ при переходе от данной точки M к близким точкам. Для этого мы используем производную поля по направлению. Напомним это понятие.

Пусть $U(M)$ — скалярное поле. Рассмотрим две близкие точки M и M' и составим отношение

$$\frac{U(M')-U(M)}{h}, \tag{6.2}$$

где h — длина отрезка MM'. Пусть точка M' приближается к M, причем направление отрезка MM' все время совпадает с направлением фиксированного единичного вектора $\boldsymbol{\lambda}$. Если при этом отношение (6.2) стремится к некоторому пределу, то этот предел называется *производной скалярного поля $U(M)$ в точке M по направлению λ* и обозначается

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \lambda}.$$

Производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ характеризует *скорость изменения величины $U(M)$ в направлении λ*.

Для вычисления $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ выберем некоторую систему координат и представим $U(M)$ в виде $U(x, y, z)$.

Пусть направление λ образует с осями координат углы α, β и γ. Тогда

$$\overline{MM'} = h(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma)$$

и

$$U(M') = U(x + h\cos\alpha,\ y + h\cos\beta,\ z + h\cos\gamma), \tag{6.3}$$

а производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ совпадает с производной по h от сложной функции (6.3) при $h = 0$. Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \left.\frac{\partial U(M')}{\partial h}\right|_{h=0} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma. \tag{6.4}$$

5. Градиент скалярного поля. Выражение (6.4) можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов: единичного вектора

$$\boldsymbol{\lambda} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma),$$

определяющего направление, по которому берется производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$, и вектора, имеющего компоненты

$$\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Этот вектор называется *градиентом* скалярного поля U и обозначается символом

$$\operatorname{grad} U.$$

Таким образом,

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{6.5}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = (\operatorname{grad} U,\ \boldsymbol{\lambda}). \tag{6.6}$$

Рис. 6.6 дает наглядную интерпретацию выражения производной по направлению как проекции $\operatorname{grad} U$ на это направление.

Из формулы (6.6), которую можно переписать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\operatorname{grad} U| \cos \varphi$$

(где φ — угол между $\operatorname{grad} U$ и единичным вектором $\boldsymbol{\lambda}$), видно, что в каждой точке, в которой $\operatorname{grad} U \neq 0$, существует единственное направление, по которому $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ имеет наибольшее значение, т. е. единственное направление наибыстрейшего возрастания функции U. Это направление совпадает с направлением вектора $\operatorname{grad} U$. Действительно, для этого направления $\varphi = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\operatorname{grad} U|,$$

в то время как для всех других направлений

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\operatorname{grad} U| \cos \varphi < |\operatorname{grad} U|.$$

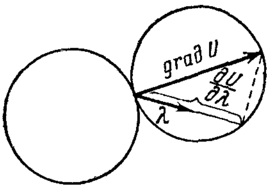

Рис. 6.6.

Итак, мы получили, что направление вектора $\operatorname{grad} U$ — это направление наибыстрейшего возрастания величины U, а длина вектора $\operatorname{grad} U$ равна скорости возрастания величины U в этом направлении.

Однако ни направление наибыстрейшего возрастания функции, ни величина ее производной в этом направлении не зависят, очевидно, от выбора системы координат. Мы установили, таким образом, что *градиент скалярного поля зависит лишь от самого поля, но не от выбора системы координат* (хотя из равенства (6.5), принятого нами за определение градиента, это сразу и не видно).

Производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ в данной точке M — это компоненты вектора, нормального к поверхности $U(x, y, z) = \text{const}$, проходящей через эту точку *). Таким образом, в каждой точке поля U градиент поля направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

---

*) Действительно, если направление $\boldsymbol{\lambda}$ лежит в плоскости, касательной к поверхности $U(x, y, z) = \text{const}$, то производная по этому направлению равна нулю:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = (\operatorname{grad} U, \boldsymbol{\lambda}) = 0,$$

т. е. $\operatorname{grad} U$ ортогонален любому вектору, лежащему в касательной плоскости.

Назовем *линией градиента* *) скалярного поля U всякую кривую, касательная к которой в каждой ее точке направлена по $\operatorname{grad} U$ в этой же точке. Таким образом, линии градиента поля — это те линии, вдоль которых поле U меняется быстрее всего.

Можно показать, что если функция $U(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно, то через каждую точку области, в которой задано поле U, проходит одна и только одна линия градиента. В каждой точке линия градиента ортогональна той поверхности уровня, на которой эта точка лежит.

§ 2. Векторные поля

1. Определение и примеры векторных полей. Мы говорим, что *в некоторой области Ω определено векторное поле, если каждой точке M этой области поставлен в соответствие определенный вектор $\mathbf{A}(M)$*.

Один из важных примеров векторных полей, к которому мы будем неоднократно возвращаться, — это поле скоростей стационарного потока жидкости. Оно определяется так: пусть область Ω заполнена жидкостью, текущей в каждой точке с некоторой скоростью $\mathbf{v}$, не зависящей от времени (но различной, вообще говоря, в разных точках); поставив в соответствие каждой точке M из Ω вектор $\mathbf{v} = \mathbf{v}(M)$, мы получим векторное поле, называемое *полем скоростей*.

Другой важный пример векторного поля — это поле тяготения. Пусть в пространстве распределена некоторая масса. Тогда на материальную точку с массой 1, помещенную в данную точку M, действует некоторая гравитационная сила. Эти силы, определенные в каждой точке, образуют векторное поле, называемое *полем тяготения* (отвечающим данному распределению масс) или *гравитационным полем*.

Если в пространстве распределены каким-либо образом электрические заряды, то на единичный электрический заряд, помещенный в точку M, эти заряды действуют с определенной силой $F(M)$. Образуемое этими силами векторное поле называется *электростатическим полем*.

И поле тяготения, и электрическое поле представляют собой примеры силовых полей.

Если $\mathbf{A}(M)$ — некоторое векторное поле в пространстве, то, взяв в этом пространстве какую-либо декартову систему координат, мы можем представить $\mathbf{A}(M)$ как совокупность трех скалярных функций — компонент этого вектора. Эти компоненты мы будем обозначать, как правило, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$. В дальнейшем мы

*) Ср. с общим определением векторной линии в следующем параграфе.