Назовем *линией градиента* *) скалярного поля U всякую кривую, касательная к которой в каждой ее точке направлена по $\operatorname{grad} U$ в этой же точке. Таким образом, линии градиента поля — это те линии, вдоль которых поле U меняется быстрее всего.

Можно показать, что если функция $U(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно, то через каждую точку области, в которой задано поле U, проходит одна и только одна линия градиента. В каждой точке линия градиента ортогональна той поверхности уровня, на которой эта точка лежит.

§ 2. Векторные поля

1. Определение и примеры векторных полей. Мы говорим, что *в некоторой области Ω определено векторное поле, если каждой точке M этой области поставлен в соответствие определенный вектор* $\mathbf{A}(M)$.

Один из важных примеров векторных полей, к которому мы будем неоднократно возвращаться, — это поле скоростей стационарного потока жидкости. Оно определяется так: пусть область Ω заполнена жидкостью, текущей в каждой точке с некоторой скоростью $\mathbf{v}$, не зависящей от времени (но различной, вообще говоря, в разных точках); поставив в соответствие каждой точке M из Ω вектор $\mathbf{v} = \mathbf{v}(M)$, мы получим векторное поле, называемое *полем скоростей*.

Другой важный пример векторного поля — это поле тяготения. Пусть в пространстве распределена некоторая масса. Тогда на материальную точку с массой 1, помещенную в данную точку M, действует некоторая гравитационная сила. Эти силы, определенные в каждой точке, образуют векторное поле, называемое *полем тяготения* (отвечающим данному распределению масс) или *гравитационным полем*.

Если в пространстве распределены каким-либо образом электрические заряды, то на единичный электрический заряд, помещенный в точку M, эти заряды действуют с определенной силой $F(M)$. Образуемое этими силами векторное поле называется *электростатическим полем*.

И поле тяготения, и электрическое поле представляют собой примеры силовых полей.

Если $\mathbf{A}(M)$ — некоторое векторное поле в пространстве, то, взяв в этом пространстве какую-либо декартову систему координат, мы можем представить $\mathbf{A}(M)$ как совокупность трех скалярных функций — компонент этого вектора. Эти компоненты мы будем обозначать, как правило, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$. В дальнейшем мы

*) Ср. с общим определением векторной линии в следующем параграфе.

будем рассматривать векторные поля, компоненты которых непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка *).

2. Векторные линии и векторные трубки. Пусть в области Ω задано векторное поле $\mathbf{A}(M)$. Кривая L, лежащая в Ω, называется *векторной линией*, если в каждой точке этой кривой направление касательной к ней совпадает с направлением вектора $\mathbf{A}$ в этой же точке. В частности, если поле $\mathbf{A}$ есть поле скоростей стационарного потока жидкости, то его векторные линии — это траектории частиц жидкости.

В вопросах, связанных с изучением полей, важную роль играет задача о нахождении векторной линии поля $\mathbf{A}$, проходящей через данную точку M_0.

Аналитически эта задача формулируется, очевидно, так: требуется найти вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \lambda \mathbf{A}, \\ \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0, \end{aligned} \tag{6.7}$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор начальной точки M_0, t_0 — начальный момент времени, а λ — произвольная числовая величина. Можно показать, что если компоненты P, Q, R вектора $\mathbf{A}$ — непрерывно дифференцируемые функции координат, ни в одной точке не обращающиеся в нуль одновременно, то условия (6.7) действительно определяют в той области, в которой задано поле $\mathbf{A}$, одну и только одну векторную линию **).

Ограниченная некоторой поверхностью Σ часть пространства, в котором задано векторное поле $\mathbf{A}$, называется *векторной трубкой*, если в каждой точки поверхности Σ нормаль к Σ ортогональна вектору $\mathbf{A}$ в этой же точке. Иначе говоря, *векторная трубка — это часть пространства, состоящая из целых векторных линий*; каждая векторная линия или целиком лежит внутри данной векторной трубки, или находится целиком вне ее. Можно сказать, что поверхность Σ, ограничивающая векторную трубку, соткана из векторных линий.

Если снова представить себе векторное поле $\mathbf{A}$ как поле скоростей движущейся жидкости, то векторная трубка — это та часть пространства, которую «заметает» при своем перемещении некоторый фиксированный объем жидкости.

3. Различные виды симметрии векторных полей. Изучение векторного поля (как и скалярного) существенно облегчается, если это поле обладает теми или иными свойствами симметрии. Перечислим некоторые важнейшие частные случаи.

---

*) Ясно, что если это условие выполнено в какой-либо одной декартовой системе координат, то оно выполнено и в любой другой системе.

**) Это следует из теоремы существования и единственности решения для систем дифференциальных уравнений (см. вып. 3, гл. 1, § 6).

а) *Плоскопараллельное поле.* Если для данного векторного поля **A** можно подобрать декартову систему координат, в которой компоненты поля **A** имеют вид $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$ (т. е. не зависят от z), то поле **A** называется *плоскопараллельным.* Если при этом $R(x, y) = 0$, то поле **A** называется *плоским.* Примером такого поля может служить поле скоростей жидкости, скорости частиц которой параллельны некоторой фиксированной плоскости и не зависят от расстояния частицы до данной плоскости (плоский поток). Векторные линии такого поля — плоские кривые (одни и те же в каждой параллельной плоскости).

б) *Осесимметрическое поле.* Векторное поле **A** называется *осесимметрическим*, если существует такая цилиндрическая система координат r, φ, z, что в каждой точке M вектор $\mathbf{A}(M)$ зависит лишь от r и z, но не от φ. Иными словами, такое поле переходит само в себя при повороте вокруг оси z. Если вектор $\mathbf{A}(M)$ зависит только от r, то поле называется *цилиндрическим.*

в) *Одномерное поле.* Векторное поле называется *одномерным*, если существует такая декартова система координат, в которой компоненты этого поля имеют вид $P(x)$, 0, 0. Векторные линии такого поля представляют собой, очевидно, совокупность всех прямых, параллельных оси x.

4. Поле градиента. Потенциальное поле. Рассмотрим снова некоторое скалярное поле $U(M)$. Построив в каждой точке M вектор $\operatorname{grad} U$, мы получим векторное поле — поле градиента скалярной величины U. Введем следующее

Определение. *Векторное поле* $\mathbf{A}(M)$ *называется потенциальным, если его можно представить как градиент некоторого скалярного поля* $U(M)$:

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} U.$$

Само скалярное поле U называется при этом *потенциалом векторного поля* **A**.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $U = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (т. е. U — сферическое поле). Найдем $\operatorname{grad} U$. Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r},$$

Аналогично

$$\frac{\partial U}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = f'(r)\frac{z}{r}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{grad} U = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{6.8}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Если векторное поле **A** имеет потенциал, то этот потенциал определяется полем **A** однозначно, с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Действительно, если скалярные поля U и V имеют один и тот же градиент, то

$$\operatorname{grad}(U-V)\equiv 0.$$

Но тогда и производная от $U-V$ по любому направлению равна нулю в любой точке, откуда сразу следует, что

$$U-V=\text{const}.$$

Векторные линии потенциального поля **A** представляют собой, разумеется, линии градиента его потенциала U, т. е. линии наибыстрейшего изменения этого потенциала.

Естественно возникает вопрос об условиях, при которых данное векторное поле **A** потенциально. Фактически этот вопрос мы уже рассмотрели в гл. 5. Действительно, там было показано (теорема 5.2), что выражение

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

(где P, Q, R — непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные 1-го порядка) служит полным дифференциалом некоторой однозначной функции $U(x,\ y,\ z)$ в том и только том случае, если P, Q, R удовлетворяют условиям *):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{6.9}$$

Но если

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=dU,$$

то

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial U}{\partial y},\quad R=\frac{\partial U}{\partial z},$$

т. е. условие (6.9) как раз и означает, что поле $(P,\ Q,\ R)$ потенциально.

Итак, *для того чтобы векторное поле* $\mathbf{A}=(P,\ Q,\ R)$, *имеющее непрерывные и непрерывно дифференцируемые компоненты, было* ***потенциальным***, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства* (6.9).

Если **A** — потенциальное векторное поле, то фактическое нахождение его потенциала сводится к нахождению функции по ее полному дифференциалу — задаче, которую мы рассматривали в § 4 гл. 5 (формула (5.43)), а для двух переменных — в § 4 гл. 4 (формула (4.50)).

---

*) Мы считаем, что область, в которой определено векторное поле **A**, односвязна.

К понятию потенциального поля мы еще вернемся в п. 5 § 4.

Пример. Пусть в начало координат O помещена масса m. Если теперь в некоторую точку $M(x, y, z)$ поместить единичную массу, то на нее будет действовать сила притяжения, равная

$$F = -\gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Эти силы, определяемые в каждой точке пространства, образуют векторное поле — поле тяготения точечной массы m. Его можно представить как градиент скалярной величины

$$\frac{\gamma m}{r},$$

называемой ньютоновским потенциалом точечной массы m. В самом деле, воспользовавшись формулой (6.8), получаем

$$\operatorname{grad} \frac{\gamma m}{r} = -\gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r}.$$

§ 3. Поток векторного поля. Дивергенция

1. Поток векторного поля через поверхность. В предыдущей главе (§ 2) мы показали, что количество жидкости, протекающей за единицу времени через данную (ориентированную) поверхность Σ, равно интегралу

$$\iint_{\Sigma} A_n \, d\sigma,$$

где A_n — нормальная составляющая вектора скорости $\mathbf{A} = (P, Q, R)$.

Эту величину мы назвали потоком жидкости через поверхность Σ. Пусть теперь $\mathbf{A}$ — произвольное векторное поле и Σ — ориентированная поверхность. Поверхностный интеграл

$$\iint_{\Sigma} A_n \, d\sigma$$

мы назовем *потоком векторного поля* $\mathbf{A}$ *через поверхность* Σ. Таким образом, если $\mathbf{A}$ — скорость движения жидкости, то поток вектора $\mathbf{A}$ через некоторую поверхность равен количеству жидкости, протекающей через эту поверхность за единицу времени. Для векторного поля иной природы поток имеет, конечно, другой физический смысл.

Пример. Пусть $U = U(x, y, z)$ — поле температур внутри некоторого тела, k — коэффициент теплопроводности и $\mathbf{A} = \operatorname{grad} U$. Согласно закону Фурье, количество тепла dQ, протекающее за