К понятию потенциального поля мы еще вернемся в п. 5 § 4.

Пример. Пусть в начало координат O помещена масса m. Если теперь в некоторую точку $M(x, y, z)$ поместить единичную массу, то на нее будет действовать сила притяжения, равная

$$F = -\gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r} \qquad (\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Эти силы, определяемые в каждой точке пространства, образуют векторное поле — поле тяготения точечной массы m. Его можно представить как градиент скалярной величины

$$\frac{\gamma m}{r},$$

называемой ньютоновским потенциалом точечной массы m. В самом деле, воспользовавшись формулой (6.8), получаем

$$\operatorname{grad} \frac{\gamma m}{r} = -\gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r}.$$

§ 3. Поток векторного поля. Дивергенция

1. Поток векторного поля через поверхность. В предыдущей главе (§ 2) мы показали, что количество жидкости, протекающей за единицу времени через данную (ориентированную) поверхность Σ, равно интегралу

$$\iint_{\Sigma} A_n \, d\sigma,$$

где A_n — нормальная составляющая вектора скорости $\mathbf{A} = (P, Q, R)$.

Эту величину мы назвали потоком жидкости через поверхность Σ. Пусть теперь $\mathbf{A}$ — произвольное векторное поле и Σ — ориентированная поверхность. Поверхностный интеграл

$$\iint_{\Sigma} A_n \, d\sigma$$

мы назовем *потоком векторного поля* $\mathbf{A}$ *через поверхность* Σ. Таким образом, если $\mathbf{A}$ — скорость движения жидкости, то поток вектора $\mathbf{A}$ через некоторую поверхность равен количеству жидкости, протекающей через эту поверхность за единицу времени. Для векторного поля иной природы поток имеет, конечно, другой физический смысл.

Пример. Пусть $U = U(x, y, z)$ — поле температур внутри некоторого тела, k — коэффициент теплопроводности и $\mathbf{A} = \operatorname{grad} U$. Согласно закону Фурье, количество тепла dQ, протекающее за единицу времени через элемент $d\sigma$ некоторой поверхности Σ, выражается формулой

$$dQ = -k \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma, \tag{6.10}$$

где $\frac{\partial U}{\partial n}$ — производная поля температур в направлении нормали к $d\sigma$. (Знак минус в правой части равенства (6.10) отвечает тому известному факту, что тепло течет от более нагретых частей тела к менее нагретым, т. е. в направлении убывания U.) Так как

$$\frac{\partial U}{\partial n} = (\operatorname{grad} U)_n,$$

то равенство (6.10) можно переписать в виде

$$dQ = -k (\operatorname{grad} U)_n \, d\sigma,$$

из которого следует, что количество тепла Q, протекающего за единицу времени через всю поверхность Σ, равно

$$Q = -\iint_{\Sigma} k (\operatorname{grad} U)_n \, d\sigma. \tag{6.11}$$

Введя вектор

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} U,$$

называемый вектором потока тепла, получаем

$$Q = \iint_{\Sigma} q_n \, d\sigma.$$

Таким образом, количество тепла, протекающее через Σ за единицу времени, равно потоку вектора $\mathbf{q}$ через поверхность Σ (отсюда и название «вектор потока тепла»).

2. Дивергенция. Пусть $\mathbf{A}$ — некоторое векторное поле, которое мы снова будем представлять себе как поле скоростей несжимаемой жидкости. Поскольку жидкость несжимаема, поток

$$\Pi = \iint_{\Sigma} A_n \, d\sigma$$

вектора $\mathbf{A}$ через какую-либо замкнутую поверхность Σ *) равен, очевидно, количеству жидкости, которое за единицу времени возникает или уничтожается в пределах той пространственной области Ω, границей которой служит Σ. Назовем это количество *суммарной мощностью источников* (если $\Pi > 0$) или *стоков* (если $\Pi < 0$),

*) Мы условимся рассматривать *внешнюю* сторону этой поверхности.

расположенных в области Σ. Рассмотрим отношение

$$\frac{\iint\limits_{\Sigma} A_n \, d\sigma}{V(\Omega)}$$

потока жидкости через поверхность Σ к объему области Ω, ограниченной этой поверхностью. Оно представляет собой среднюю плотность источников (или стоков), т. е. количество жидкости, возникающей (исчезающей) за единицу времени в единице объема области Ω. Рассмотрим, наконец, предел

$$\lim_{\Omega \to M} \frac{\iint\limits_{\Sigma} A_n \, d\sigma}{V(\Omega)}$$

этого отношения, где знак $\lim\limits_{\Omega \to M}$ означает предел при условии, что область Ω стягивается к некоторой фиксированной точке M. Этот предел можно назвать плотностью источников (стоков) в точке M. Он представляет собой скалярную величину и служит важной характеристикой исходного поля.

Рассмотрев этот пример, перейдем к общим определениям.

Пусть $\mathbf{A}$ — некоторое векторное поле. Поставим в соответствие каждой пространственной области Ω, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой поверхностью Σ, величину

$$\iint\limits_{\Sigma} A_n \, d\sigma$$

— *поток вектора* $\mathbf{A}$ *через внешнюю сторону поверхности* Σ. Мы получим некоторую функцию области $\Phi(\Omega)$. Легко проверить, что эта функция аддитивна.

Определение. *Производная функции* $\Phi(\Omega)$ *по объему, т. е. предел*

$$\lim_{\Omega \to M} \frac{\iint\limits_{\Sigma} A_n \, d\sigma}{V(\Omega)}, \tag{6.12}$$

называется дивергенцией векторного поля $\mathbf{A}$ *и обозначается*

$$\operatorname{div} \mathbf{A}.$$

Таким образом, введенная нами для поля скоростей несжимаемой жидкости плотность источников представляет собой дивергенцию этого поля скоростей.

Теорема 6.1. *Если* $\mathbf{A}=(P, Q, R)$ — *векторное поле, определенное в области* Ω *и такое, что функции* P, Q, R *непрерывны в* Ω *вместе со всеми своими первыми производными, то* $\operatorname{div}\mathbf{A}$ *существует во всех точках этой области и в любой декартовой системе координат выражается формулой*

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}. \tag{6.13}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Остроградского

$$\iint_{\Sigma} A_n\,d\sigma=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv.$$

В силу теоремы о производной тройного интеграла по объему (п. 5 § 1 гл. 2), производная по объему от правой части этого равенства существует и равна $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$. Следовательно, тому же самому выражению равна и производная по объему от левой его части. Но эта последняя и есть по определению $\operatorname{div}\mathbf{A}$.

Замечание. Часто равенство

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

принимают за определение дивергенции. Однако это определение менее удобно, чем принятое нами, так как оно опирается на выбор той или иной системы координат, и мы должны еще доказывать, что сумма $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ от выбора системы координат не зависит. А независимость от выбора системы координат выражения (6.12) очевидна.

Итак, каждому векторному полю $\mathbf{A}$, компоненты которого непрерывны и имеют непрерывные частные производные, мы поставили в соответствие скалярную функцию $\operatorname{div}\mathbf{A}$. Пользуясь этим понятием, мы можем теперь формулу Остроградского записать так:

$$\iint_{\Sigma} A_n\,d\sigma=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\mathbf{A}\,dv, \tag{6.14}$$

т. е. *поток вектора* $\mathbf{A}$ *через внешнюю сторону замкнутой поверхности* Σ *равен интегралу от дивергенции поля* $\mathbf{A}$, *взятому по области, ограниченной поверхностью* Σ.

3. Физический смысл дивергенции для различных полей. Примеры.

а) Мы уже выяснили, что для поля скоростей $\mathbf{A}$ несжимаемой жидкости, движущейся в некоторой пространственной области, выражение

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A}\, dv$$

представляет собой суммарную мощность источников, расположенных в области Ω, а $\operatorname{div} \mathbf{A}$ — это плотность источников (т. е. их мощность, приходящуюся на единицу объема). В частности, если $\mathbf{A}$ — поле скоростей несжимаемой жидкости, у которой нет ни стоков, ни источников, то

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

б) Рассмотрим теперь поле тяготения, создаваемое некоторым распределением масс. Выясним, что представляет собой дивергенция такого поля. Рассмотрим сначала поле, создаваемое массой m_0, сосредоточенной в точке (x_0, y_0, z_0). В этом случае единичная масса, помещенная в точку (x, y, z), притягивается с силой

$$\mathbf{F} = \left(\gamma m_0 \frac{x - x_0}{r^3},\quad \gamma m_0 \frac{y - y_0}{r^3},\quad \gamma m_0 \frac{z - z_0}{r^3}\right) \tag{6.15}$$

$$\left(r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\right).$$

Здесь γ — постоянная тяготения, зависящая от выбора единиц. Ниже мы γ писать не будем, считая, что система единиц выбрана так, что $\gamma = 1$. Вычислим дивергенцию силового поля (6.15). В каждой точке, отличной от точки (x_0, y_0, z_0), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(m_0 \frac{x - x_0}{r^3}\right) = m_0 \frac{r^3 - 3(x - x_0)^2 r}{r^6} = m_0 \frac{r^2 - 3(x - x_0)^2}{r^5},$$

аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(m_0 \frac{y - y_0}{r^3}\right) = m_0 \frac{r^2 - 3(y - y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(m_0 \frac{z - z_0}{r^3}\right) = m_0 \frac{r^2 - 3(z - z_0)^2}{z^5}.$$

Складывая, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = m_0 \frac{3r^2 - 3(x - x_0)^2 - 3(y - y_0)^2 - 3(z - z_0)^2}{r^5} = 0.$$

Однако в точке (x_0, y_0, z_0) приведенные выкладки теряют смысл, и в этой точке значение $\operatorname{div} \mathbf{F}$ вообще не определено. Поэтому и значение интеграла

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dv$$

не может быть получено непосредственным вычислением, если область Ω содержит точку (x_0, y_0, z_0). Таким образом, выражение, стоящее в формуле Остроградского (6.14) справа, в нашем случае не определено. Однако мы легко можем найти величину, стоящую в этой формуле слева, т. е. поток вектора $\mathbf{F}$ через поверхность Σ, ограничивающую объем Ω. Сделаем это. Пусть сначала Σ — сфера некоторого радиуса a с центром в точке (x_0, y_0, z_0). В каждой точке такой сферы направление вектора (6.15) совпадает с направлением нормали к этой сфере. Поэтому проекция вектора (6.15) на нормаль в данном случае равна длине этого вектора, т. е. постоянной величине $\frac{m_0}{a^2}$. Следовательно,

$$\int\limits_{\Sigma}\int F_n\, d\sigma = \frac{m_0}{a^2}\, 4\pi a^2 = 4\pi m_0.$$

Заменив сферу Σ любой другой замкнутой поверхностью Σ_1, охватывающей точку (x_0, y_0, z_0), мы получим тот же самый результат. Действительно, выберем сферу Σ настолько малой, чтобы она целиком содержалась внутри Σ_1. Тогда

$$\int\limits_{\Sigma_1}\int F_n\, d\sigma - \int\limits_{\Sigma}\int F_n\, d\sigma = 0,$$

так как левая часть этого равенства представляет собой поток вектора $\mathbf{F}$ через границу пространственной области, в которой

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Sigma_1}\int F_n\, d\sigma = \int\limits_{\Sigma}\int F_n\, d\sigma.$$

Рассмотрим теперь поле тяготения, создаваемое несколькими точечными массами. Это поле равно сумме полей, создаваемых каждой массой в отдельности. Поток суммы полей через некоторую поверхность Σ равен, очевидно, сумме потоков слагаемых; отсюда вытекает, что поток через некоторую замкнутую поверхность поля тяготения, создаваемого системой материальных точек, равен сумме находящихся внутри этой поверхности масс, умноженной на 4π.

С помощью предельного перехода от системы материальных точек к массе, непрерывно распределенной по пространству с объемной плотностью $\rho(x, y, z)$, можно показать *), что при непрерывном распределении масс поток гравитационного поля через замкнутую поверхность Σ равен заключенной внутри этой поверхности массе, умноженной на 4π. Но эта же масса может быть представлена как

*) Строгое обоснование этого предельного перехода относится к так называемой теории потенциала; оно опирается на теорию интегралов, зависящих от параметра, основы которой излагаются в гл. 10.

интеграл от плотности $\rho(x, y, z)$, взятый по объему Ω, ограниченному поверхностью Σ. Таким образом, обозначая по-прежнему символом $\mathbf{F}(x, y, z)$ значение гравитационного поля в точке (x, y, z), имеем

$$\iint_{\Sigma} F_n(x, y, z)\,d\sigma = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)\,dv,$$

откуда

$$4\pi\rho(x, y, z) = \lim_{\Omega \to (x, y, z)} \frac{\iint F_n\,d\sigma}{V(\Omega)},$$

стоящий здесь справа предел представляет собой дивергенцию векторного поля $\mathbf{F}$. Итак, окончательно получаем: *дивергенция гравитационного поля, создаваемого некоторым распределением масс, равна объемной плотности* $\rho(x, y, z)$ *этого распределения, умноженной на* 4π.

в) Те же самые рассуждения, которые мы провели для поля тяготения, можно повторить и для электростатического поля и показать, что дивергенция такого поля равна плотности зарядов, умноженной на 4π. (Это утверждение, известное в электростатике под названием теоремы Гаусса, широко используется в различных задачах, связанных с электростатическими полями, например при вычислении напряженности поля в конденсаторах различной формы.)

4. Соленоидальное поле. Векторное поле, дивергенция которого тождественно равна нулю, называется *соленоидальным* *) или *трубчатым*. Примером соленоидального поля может служить, как мы видели выше, поле скоростей несжимаемой жидкости при отсутствии стоков и источников, т. е. при условии, что ни в одной точке жидкость не исчезает и не возникает.

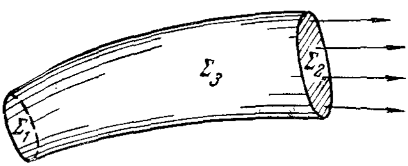

Рис. 6.7.

Для соленоидальных полей имеет место так называемый *закон сохранения интенсивности векторной трубки*, состоящий в следующем. Пусть $\mathbf{A}$ — соленоидальное поле. Рассмотрим некоторую векторную трубку и возьмем ее отрезок, заключенный между двумя ее сечениями Σ_1 и Σ_2 (рис. 6.7). Эти сечения вместе с боковой поверхностью Σ_3 трубки образуют замкнутую поверхность Σ. Так как поле соленоидально, т. е. $\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv 0$, то,

*) От греческого слова σωλην (солен) — трубка.

в силу формулы Остроградского,

$$\iint_{\Sigma} A_n\, d\sigma = 0.$$

Но

$$\iint_{\Sigma} A_n\, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} A_n\, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} A_n\, d\sigma + \iint_{\Sigma_3} A_n\, d\sigma, \tag{6.16}$$

причем в каждом из слагаемых имеется в виду внешняя сторона поверхности. Третье из стоящих справа слагаемых равно нулю, так как по определению векторной трубки на поверхности Σ_3 направление векторного поля **A** перпендикулярно направлению нормали к этой поверхности, т. е. на Σ_3

$$A_n \equiv 0.$$

Если мы теперь на сечении Σ_1 направление нормали изменим на противоположное, то равенство (6.16) перепишется в виде

$$\iint_{\Sigma_1} A_n\, d\sigma = \iint_{\Sigma_2} A_n\, d\sigma, \tag{6.17}$$

т. е. поток вектора **A** через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение. Если поле вектора **A** представлять себе как поле скоростей несжимаемой жидкости при отсутствии источников и стоков, то равенство (6.17) означает: *количество жидкости, протекающей за единицу времени через сечение векторной трубки, одно и то же для всех сечений этой трубки.*

5. Уравнение неразрывности. В качестве применения изложенных выше понятий дадим вывод одного из основных уравнений движения жидкости, так называемого уравнения неразрывности. Пусть **A** — поле скоростей движущейся жидкости. Мы будем предполагать, что в рассматриваемой области жидкость не исчезает и не возникает. Однако в отличие от наших предыдущих рассмотрений мы будем предполагать эту жидкость сжимаемой, т. е. считать плотность ρ некоторой функцией координат x, y, z и времени t. Выясним, как связана скорость движения такой жидкости с изменением ее плотности. Для этой цели рассмотрим некоторый замкнутый объем Ω и подсчитаем двумя способами изменение ΔQ количества жидкости внутри этого объема за время Δt. Пусть $\rho(x, y, z, t)$ — плотность жидкости в момент t в точке x, y, z. Тогда, очевидно,

$$\Delta Q = \Delta t \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv.$$

С другой стороны, изменение количества жидкости внутри объема Ω равно умноженному на Δt потоку жидкости через поверхность Σ, ограничивающую этот объем, т. е. равно $-\Delta t \int\limits_{\Sigma}\int (\rho \mathbf{A})_n \, d\sigma$, где $\mathbf{n}$ — наружная нормаль (знак минус берется потому, что если скорость направлена наружу, то количество жидкости в объеме уменьшается). Преобразовав этот поверхностный интеграл с помощью формулы Остроградского в объемный, получим

$$\Delta Q = -\Delta t \int\int\limits_{\Omega}\int \operatorname{div}(\rho \mathbf{A}) \, dv.$$

Приравняв друг другу два выражения для ΔQ и сократив на Δt, будем иметь

$$-\int\int\limits_{\Omega}\int \operatorname{div}(\rho \mathbf{A}) \, dv = \int\int\limits_{\Omega}\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv;$$

так как это равенство должно иметь место для любой области Ω, то равны между собой и подынтегральные выражения, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{A}). \tag{6.18}$$

Мы получили уравнение, связывающее между собой скорость и плотность движущейся жидкости при отсутствии источников и стоков. Оно называется *уравнением неразрывности*.

Если ввести вектор $\mathbf{J} = \rho \mathbf{A}$ — *плотность потока жидкости*, то уравнение неразрывности можно переписать так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \tag{6.18'}$$

6. Плоское течение жидкости. Формула Остроградского на плоскости. Рассмотрим плоское векторное поле, т. е. поле, компоненты которого в некоторой декартовой системе координат имеют вид

$$P = P(x, y), \quad Q = Q(x, y), \quad R = 0 \tag{6.19}$$

(см. п. 3 § 2). Его можно представлять себе как поле скоростей жидкости, каждая частица которой движется параллельно фиксированной плоскости со скоростью, не зависящей от ее расстояния до этой плоскости (такое движение жидкости называется плоским течением). Дивергенция такого поля равна

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Пусть Ω — цилиндр высоты единица, с основанием G, лежащим в плоскости xy, и боковой поверхностью Σ (рис. 6.8). Напишем для области Ω формулу Остроградского, предварительно заметив, что тройной интеграл от $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ по Ω численно равен двойному интегралу от этого выражения по плоской области G, поток вектора (6.19) через поверхность Σ равен криволинейному интегралу

$$\int_L [P\cos(\mathbf{n},\ x)+Q\cos(\mathbf{n},\ y)]\,dl,$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к контуру L, а поток через верхнее и нижнее основания цилиндра Ω равен нулю (последнее вытекает из того, что вектор (6.19) перпендикулярен оси z). В силу сказанного, формула Остроградского для плоскопараллельного поля $\mathbf{A}$ и цилиндрической области Ω имеет вид

$$\int_L [P\cos(\mathbf{n},\ x)+Q\cos(\mathbf{n},\ y)]\,dl=\int_G\int\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy. \quad (6.20)$$

Отбросим теперь окончательно третью координату z, будем рассматривать (6.19) как векторное поле, заданное в плоскости xy. Назовем криволинейный интеграл

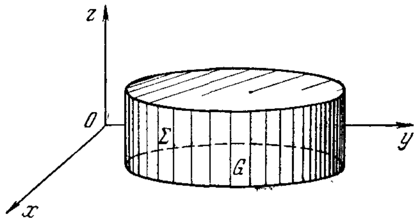

Рис. 6.8.

$$\int_L [P\cos(\mathbf{n},\ x)+Q\cos(\mathbf{n},\ y)]\,dl \quad (6.21)$$

потоком этого векторного поля через контур L. Тогда формула (6.20), называемая *формулой Остроградского для плоскости*, означает, что двойной интеграл от дивергенции плоского поля $\mathbf{A}$ по некоторой области G равен потоку вектора $\mathbf{A}$ через границу этой области.

Легко убедиться в том, что формула (6.20) — просто эквивалент формулы Грина (4.45). Действительно, если мы, как обычно, обозначим через α угол между касательной к кривой и положительным направлением оси x, то

$$\cos(\mathbf{n},\ x)=-\sin\alpha, \qquad \cos(\mathbf{n},\ y)=\cos\alpha,$$

поэтому интеграл (6.21) можно записать так:

$$\int_L (Q\cos\alpha-P\sin\alpha)\,dl,$$

или

$$\int_L Q\,dx-P\,dy.$$

Преобразовав этот криволинейный интеграл в двойной с помощью формулы Грина, мы и получим равенство (6.20). Это рассуждение можно обратить, т. е. если равенство (6.20) установлено, то из него можно вывести формулу Грина.

Таким образом, как формула Стокса, так и формула Остроградского в плоском случае превращаются в формулу Грина.

§ 4. Циркуляция. Ротор

1. Циркуляция векторного поля. Пусть снова $\mathbf{A}=(P, Q, R)$ — некоторое векторное поле и L — гладкая или кусочно-гладкая кривая. Криволинейный интеграл

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

или, короче,

$$\int_L A_\tau\,dl,$$

где A_τ — тангенциальная составляющая поля $\mathbf{A}$ на контуре L, мы назовем *циркуляцией векторного поля* $\mathbf{A}$ *вдоль кривой* L. Если $\mathbf{A}=(P, Q, R)$ — силовое поле, то его циркуляция вдоль кривой L представляет собой, как мы уже знаем (см. § 2 гл. 4), работу этого силового поля вдоль пути L. Для полей иной природы циркуляция имеет, конечно, другой физический символ.

2. Ротор векторного поля. Запись формулы Стокса в векторных обозначениях. Если L — замкнутый контур, то криволинейный интеграл

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

по этому контуру можно преобразовать в поверхностный, воспользовавшись формулой Стокса (5.41):

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$
$$=\int_\Sigma\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx, \tag{6.22}$$

взятый по некоторой поверхности Σ, натянутой на контур L. Правая часть равенства (6.22) представляет собой поток через поверхность Σ вектора

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{6.23}$$

Назовем этот вектор *ротором* (или *вихрем*) векторного поля $\mathbf{A}$ и обозначим $\operatorname{rot}\mathbf{A}$. Таким образом, по определению

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{6.24}$$