можно обратить, т. е. если равенство (6.20) установлено, то из него можно вывести формулу Грина.

Таким образом, как формула Стокса, так и формула Остроградского в плоском случае превращаются в формулу Грина.

§ 4. Циркуляция. Ротор

1. Циркуляция векторного поля. Пусть снова $\mathbf{A}=(P, Q, R)$ — некоторое векторное поле и L — гладкая или кусочно-гладкая кривая. Криволинейный интеграл

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

или, короче,

$$\int_L A_\tau\,dl,$$

где A_τ — тангенциальная составляющая поля $\mathbf{A}$ на контуре L, мы назовем *циркуляцией векторного поля* $\mathbf{A}$ *вдоль кривой* L. Если $\mathbf{A}=(P, Q, R)$ — силовое поле, то его циркуляция вдоль кривой L представляет собой, как мы уже знаем (см. § 2 гл. 4), работу этого силового поля вдоль пути L. Для полей иной природы циркуляция имеет, конечно, другой физический символ.

2. Ротор векторного поля. Запись формулы Стокса в векторных обозначениях. Если L — замкнутый контур, то криволинейный интеграл

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

по этому контуру можно преобразовать в поверхностный, воспользовавшись формулой Стокса (5.41):

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$
$$=\int_\Sigma\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx, \tag{6.22}$$

взятый по некоторой поверхности Σ, натянутой на контур L. Правая часть равенства (6.22) представляет собой поток через поверхность Σ вектора

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{6.23}$$

Назовем этот вектор *ротором* (или *вихрем*) векторного поля $\mathbf{A}$ и обозначим $\operatorname{rot}\mathbf{A}$. Таким образом, по определению

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{6.24}$$

Пользуясь понятием ротора, мы можем переписать формулу Стокса в следующем компактном виде:

$$\oint_L A_\tau \, dl = \iint_\Sigma (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n \, d\sigma, \tag{6.25}$$

т. е. *циркуляция векторного поля* **A** *вдоль некоторого замкнутого контура* L *равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность, натянутую на этот контур.*

В нашем определении ротора участвует не только само векторное поле **A**, но и некоторая определенная система координат (x, y, z). Однако на самом деле вектор $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ не зависит от выбора координатной системы, а определяется лишь исходным векторным полем **A**. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся формулой Стокса (6.25), считая, что поверхность Σ — это некоторая плоская площадка, а L—ограничивающий ее контур. Применив к стоящему в равенстве (6.25) справа поверхностному интегралу теорему о среднем, получим *)

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A}(M^*))_n = \frac{\oint_L A_\tau \, dl}{\sigma},$$

где M^* — некоторая точка, принадлежащая площадке Σ, а σ — площадь этой площадки. Будем теперь стягивать площадку Σ к некоторой фиксированной точке M так, чтобы направление нормали **n** к этой площадке оставалось все время одним и тем же. В пределе получим

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A}(M))_n = \lim_{\Sigma \to M} \frac{\oint_L A_\tau \, dl}{\sigma}. \tag{6.26}$$

Циркуляция вектора **A** вдоль контура не зависит от выбора координатной системы, поэтому из равенства (6.26) вытекает, что проекция $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ на направление нормали **n** не зависит от выбора системы координат. Но направление нормали **n** мы могли выбрать произвольно, поэтому проекция вектора $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ на любое направление, а следовательно, и сам вектор $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ не зависят от выбора системы координат **).

---

*) Как обычно, мы считаем, что компоненты P, Q, R векторного поля **A** имеют непрерывные частные производные первого порядка по x, y и z.

**) Предполагается, что мы рассматриваем только правые системы координат. При переходе к левой системе координат (где положительным направлением вращения считается направление по часовой стрелке) вектор $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ изменит направление на противоположное.

3. Символическая запись ротора. Ротор векторного поля $\mathbf{A}=(P, Q, R)$ удобно записывать в виде символического детерминанта

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \tag{6.27}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат, а под умножением символа $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ или $\frac{\partial}{\partial z}$ на некоторую функцию понимается выполнение соответствующей операции дифференцирования $\left(\text{например, } \frac{\partial}{\partial x} Q \text{ означает } \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$.

Действительно, разложив детерминант (6.27) по элементам первой строки, получим, что

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

4. Физический смысл ротора. Физический смысл ротора можно пояснить следующим образом. Будем снова рассматривать векторное поле $\mathbf{A}$ как поле скоростей движущейся жидкости. Поместим в таком потоке, в определенной его точке, бесконечно малое колесико с лопастями, расположенными по окружности L этого колесика (рис. 6.9). Под воздействием потока жидкости такое колесико будет вращаться с некоторой скоростью, зависящей, вообще говоря, от направления оси колесика.

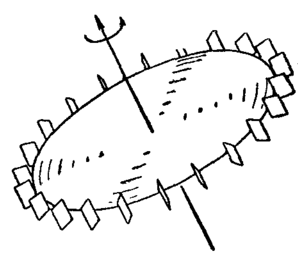

Рис. 6.9.

Естественно считать, что линейная скорость каждой точки окружности L по величине будет равна среднему произведений проекций вектора $\mathbf{A}$ на направление касательной к L, т. е. будет выражаться формулой

$$v = \frac{1}{2\pi R} \oint_L A_\tau \, dl. \tag{6.28}$$

По формуле Стокса (6.25) криволинейный интеграл (6.28) можно преобразовать в поверхностный интеграл

$$\frac{1}{2\pi R} \iint_\Sigma (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n \, d\sigma, \tag{6.29}$$

взятый по площади Σ рассматриваемого колесика. Считая это колесико бесконечно малым, мы можем записать интеграл $\iint\limits_{\Sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n \, d\sigma$ в виде произведения площади колесика на значение $(\operatorname{rot} \mathbf{A})_n$ в его центре, т. е. в виде

$$\pi R^2 (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n.$$

В результате равенство (6.28) принимает вид

$$v = \frac{R}{2} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n.$$

Максимально возможное значение проекции вектора на какое-либо направление есть модуль этого вектора. Поэтому, если направление оси колесика выбрать так, чтобы его скорость v была максимальной (это направление, очевидно, совпадает с направлением $\operatorname{rot} \mathbf{A}$), то мы получим

$$v_{\max} = \frac{R}{2} |\operatorname{rot} \mathbf{A}|$$

или

$$|\operatorname{rot} \mathbf{A}| = \frac{2v_{\max}}{R}.$$

Но $\frac{v}{R}$ — это величина угловой скорости ω колесика. Итак, мы получили следующий результат: если колесико с лопастями ориентировано так, что скорость его вращения максимальна, то его угловая скорость равна половине $|\operatorname{rot} \mathbf{A}|$, а направление оси совпадает с направлением вектора $\operatorname{rot} \mathbf{A}$.

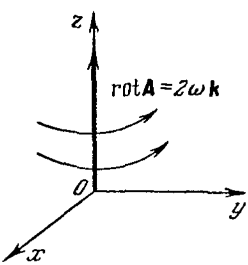

Рис. 6.10.

Таким образом, $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ характеризует «вращательную компоненту» поля скоростей; он равен удвоенной угловой скорости вращения бесконечно малой частицы жидкости.

Примеры. 1. Рассмотрим векторное поле с компонентами

$$P = -y\omega, \quad Q = x\omega, \quad R = 0.$$

Это поле можно рассматривать как поле скоростей, отвечающее вращению всего пространства вокруг оси z с угловой скоростью ω. Ротор этого векторного поля равен, как легко проверить, $2\omega\mathbf{k}$, т. е. он направлен по оси вращения, а по величине равен удвоенной угловой скорости (рис. 6.10).

Физический смысл этого результата заключается в следующем. Всякая частица жидкости при вращении вокруг оси z участвует в двух движениях: в мгновенном переносном движении со скоростью $\mathbf{v} = (-y\omega, x\omega, 0)$ и в мгновенном вращательном движении. Легко видеть, что мгновенная угловая скорость вращения любой частицы совпадает с угловой скоростью ω всего макроскопического движения жидкости. Поэтому поле мгновенных угловых скоростей частиц оказывается постоянным и равным ω. Значит, и поле ротора также постоянно и равно 2ω. Вся жидкость как бы заполнена бесконечно малыми вихрями.

2. Рассмотрим жидкость, текущую в постоянном направлении с постоянной скоростью, т. е. предположим, что P, Q и R постоянны. В этом случае $\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0$.

3. Пусть $P = y$, $Q = 0$, $R = 0$. В этом случае

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = -\mathbf{k}.$$

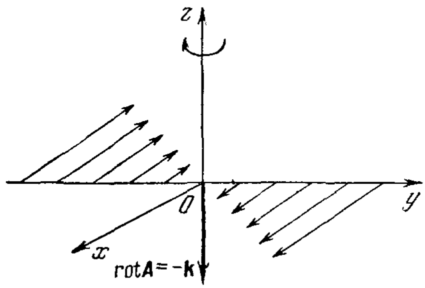

Рис. 6.11.

В последнем примере ротор в каждой точке отличен от нуля, хотя все векторные линии — прямые, параллельные плоскости yz. Это может показаться противоречащим утверждению, что $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ характеризует «вращательную компоненту» поля $\mathbf{A}$. Но на самом деле это не так. Здесь «вращательная компонента» обусловлена не искривлением векторных линий, а изменением скорости движения при изменении расстояния от плоскости yz. Легко сообразить, что колесико с лопастями, поставленное в поток жидкости, движущейся в каждой точке (x, y, z) со скоростью $(y, 0, 0)$, не будет находиться в покое, если только его ось вращения не перпендикулярна оси z.

4. Пусть векторное поле $\mathbf{A}$ имеет компоненты

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad Q = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad R = 0. \tag{6.30}$$

Это поле можно рассматривать как поле скоростей жидкости, движущейся в плоскости xy по гиперболам $xy = C$ (рис. 6.12) так, что величина скорости в каждой точке равна 1. Найдем дивергенцию и ротор этого поля. Имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right] \mathbf{k} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \mathbf{k}.$$

Здесь дивергенция положительна, когда $|y| > |x|$, и отрицательна при $|y| < |x|$. Физически это означает, что движение несжимаемой жидкости, описываемое полем (6.30), возможно лишь тогда, когда в тех областях, где $|y| > |x|$, имеются источники, а там, где $|y| < |x|$, имеют место стоки. Ротор поля (6.30), как и всякого плоскопараллельного поля, направлен в каждой точке по оси z, именно, его направление совпадает с положительным направлением оси z во второй и четвертой четвертях и с отрицательным направлением оси z в первой и третьей. И дивергенция, и ротор поля (6.30) стремятся к нулю, когда $x^2+y^2 \to \infty$, т. е. по мере удаления от начала координат.

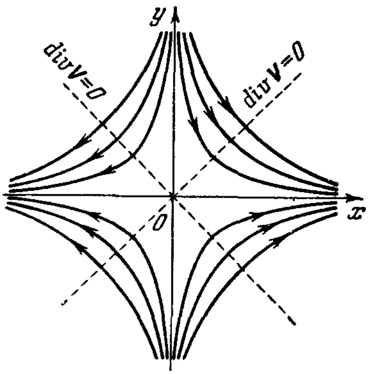

Рис. 6.12.

5. Еще раз о потенциальных и соленоидальных полях. Понятие ротора, рассмотренное в этом параграфе, непосредственно связано с определениями потенциального и соленоидального полей, введенными выше.

Мы назвали потенциальным векторное поле, представимое в виде градиента некоторого скалярного поля, и показали*), что векторное поле $\mathbf{A}=(P, Q, R)$ потенциально в том и только том случае, если его компоненты удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Но эти три условия означают не что иное, как равенство нулю всех трех компонент ротора поля $\mathbf{A}$. Таким образом:

Для того чтобы векторное поле $\mathbf{A}$ *было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* **)

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0.$$

Понятие соленоидального поля, введенное в § 2, тоже связано с понятием ротора. Действительно, непосредственное вычисление показывает, что для любого векторного поля $\mathbf{A}$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0,$$

т. е. векторное поле, представимое в виде ротора какого-либо другого векторного поля, соленоидально. Можно показать (мы не будем этого делать), что верно и обратное, т. е. что *всякое соленоидальное поле можно представить в виде ротора некоторого век-*

*) Считая функции P, Q, R непрерывно дифференцируемыми, а область, в которой задано поле (P, Q, R), односвязной.

**) Мы считаем, что поле $\mathbf{A}$ задано в односвязной области и его компоненты дважды непрерывно дифференцируемы.

торного поля. Иными словами, для всякого поля $\mathbf{A}$, удовлетворяющего условию $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, можно подобрать поле $\mathbf{B}$ так, что $\mathbf{A}=\operatorname{rot}\mathbf{B}$. Это векторное поле $\mathbf{B}$ определяется не однозначно, а с точностью до произвольного слагаемого вида $\operatorname{grad} U$.

Если $\mathbf{A}=\operatorname{rot}\mathbf{B}$, то поле $\mathbf{B}$ называется *вектор-потенциалом* поля $\mathbf{A}$.

Хотя потенциальные и соленоидальные поля не исчерпывают всех векторных полей, любое векторное поле сводится к комбинации полей этих двух типов. Точнее говоря, можно доказать, что всякое векторное поле $\mathbf{A}$ представимо в виде

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C},$$

где $\mathbf{B}$ потенциально, а $\mathbf{C}$ соленоидально.

§ 5. Оператор Гамильтона

1. Символический вектор ∇. В § 1 мы ввели понятие градиента скалярного поля. Переход от скалярного поля U к $\operatorname{grad} U$ можно рассматривать как некоторую операцию, во многом аналогичную по своим свойствам операции дифференцирования, с той, однако, разницей, что дифференцирование переводит скаляр в скаляр, в то время как здесь мы имеем переход от скаляра к вектору. Операцию перехода от U к $\operatorname{grad} U$ часто обозначают, следуя Гамильтону *), символом ∇ (читается «набла» **)) и называют *оператором «набла»*, или *оператором Гамильтона*. Таким образом, по определению

$$\nabla U=\operatorname{grad} U.$$

Оператор ∇ удобно трактовать как символический вектор с компонентами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},$$

а применение его к скалярной функции — как умножение скаляра на этот вектор ***).

---

*) У. Р. Гамильтон (1805—1865) — английский математик и механик.

**) Само название «набла» было также введено Гамильтоном. Наблой назывался старинный музыкальный инструмент, имевший треугольную форму.

***) Выше, например, при записи ротора как символического детерминанта мы уже видели, что операцию дифференцирования удобно представлять себе как «умножение» символа дифференцирования на ту функцию, производная которой вычисляется.