которую можно рассматривать как результат применения «скалярной» операции

$$(\mathbf{A},\ \nabla)=A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}$$

к каждой из компонент вектора **B** *).

§ 6. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа

1. Дифференциальные операции второго порядка. В предыдущих параграфах мы ввели понятия градиента, дивергенции и ротора. В приложениях векторного анализа приходится встречаться не только с выполнением этих основных операций, но и с различными их комбинациями. Особенно часто встречаются так называемые операции второго порядка, т. е. попарные комбинации трех указанных выше основных операций.

Комбинируя символы grad, rot, div попарно, мы можем составить из них девять пар. Однако не все эти пары имеют смысл; например, операция

$$\mathrm{rot\ div}$$

(т. е. взятие ротора от дивергенции) не имеет смысла ни для скалярного поля, ни для векторного. Все имеющиеся здесь возможности изображаются следующей таблицей:

	Скалярное поле U	Векторное поле **A**	
	grad	div	rot
grad		grad div **A**	
div	div grad U		div rot **A**
rot	rot grad $U\equiv 0$		rot rot **A** $\equiv 0$

в которой заштрихованы клетки, отвечающие не имеющим смысла сочетаниям основных операций. Мы видим, что применительно

*) Для большей симметрии формул мы здесь обозначили компоненты векторов **A** и **B** теми же буквами, что сами векторы, добавив соответствующие индексы. Такой системой обозначений мы будем пользоваться и дальше.

к скалярному полю имеют смысл две операции, а именно:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U,$$
$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U.$$

Первое из этих выражений представляет собой ротор потенциального поля $\operatorname{grad} U$ и, как мы видели, тождественно равно нулю. Выражение $\operatorname{div}\operatorname{grad} U$, вообще говоря, не обязано быть нулем. Оно называется *оператором Лапласа* *) и обозначается ΔU. Воспользовавшись известными выражениями градиента и дивергенции в декартовых координатах, получаем

$$\Delta U = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Так как и дивергенция, и градиент не зависят, как мы знаем, от выбора координатной системы, то и ΔU зависит лишь от самого поля U, но не от системы координат. К оператору Лапласа мы еще вернемся ниже.

Оператор Лапласа Δ естественно рассматривать как скалярный квадрат вектора ∇. Действительно,

$$(\nabla, \nabla) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \Delta,$$

т. е.

$$(\nabla, \nabla)\, U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U.$$

Иногда приходится оператор Δ применять не к скалярной величине, а к вектору. При этом если

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k},$$

то под $\Delta\mathbf{A}$ понимается вектор

$$\Delta A_x\mathbf{i} + \Delta A_y\mathbf{j} + \Delta A_z\mathbf{k}.$$

Как мы увидим немного ниже, это выражение на самом деле зависит только от самого вектора $\mathbf{A}$, но не от выбора системы координат.

Рассмотрим теперь операции второго порядка для векторного поля. Применительно к векторному полю имеют смысл три операции второго порядка, а именно:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A},$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A},$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

---

*) Точнее, оператором Лапласа называется сам символ $\Delta \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}$, применение которого к скалярному полю U дает величину (опять-таки скалярную) ΔU.

С выражением вида $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}$ мы уже встречались в § 4 при нахождении условий соленоидальности поля и выяснили, что всегда

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}\equiv 0.$$

Напротив, выражения $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}$ и $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$ не обязаны обращаться в нуль. Они часто встречаются в различных вопросах механики и электродинамики.

Выведем формулу, связывающую эти величины. Рассмотрим для этого выражение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A},$$

которое в символической форме записывается так:

$$[\nabla,\ [\nabla,\ \mathbf{A}]].$$

Воспользовавшись снова формулой для двойного векторного произведения, получим, что

$$[\nabla,\ [\nabla,\ \mathbf{A}]]=\nabla(\nabla,\ \mathbf{A})-(\nabla,\ \nabla)\,\mathbf{A},$$

т. е.

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}. \tag{6.31}$$

Из этой формулы видно, в частности, что выражение $\Delta\mathbf{A}$, определенное выше, действительно не зависит от выбора системы координат, поскольку величины $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$ и $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}$ с выбором системы координат не связаны.

Так как в выражении (6.31) участвует только одна переменная величина, то мы, оперируя с ∇, могли воспользоваться обычными формулами векторной алгебры. Читателю рекомендуется проверить равенство (6.31) непосредственно, не прибегая к символическому методу (и сравнить выкладки в том и другом случае).

2. Уравнение теплопроводности. В качестве применения введенных выше понятий рассмотрим вывод уравнения для поля температур внутри некоторого нагретого тела. Пусть $U(x,\ y,\ z,\ t)$ — температура тела в точке $(x,\ y,\ z)$ в момент t. Выделим в этом теле некоторый объем Ω, ограниченный замкнутой поверхностью Σ, и вычислим двумя способами изменение количества тепла внутри этого объема за малый промежуток времени dt. В каждом элементе объема температура за время dt меняется на величину $\frac{\partial U}{\partial t}\,dt$, а масса этого элемента равна $\rho\,dv$ (где ρ — плотность). Следовательно, изменение количества тепла в элементе объема есть

$$c\,\frac{\partial U}{\partial t}\,dt\rho\,dv$$

(здесь c — удельная теплоемкость; величины c и ρ предполагаются постоянными), а изменение количества тепла за время dt во всем объеме Ω равно

$$dQ = dt \iiint_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} c\rho\, dv.$$

С другой стороны, ту же самую величину dQ можно подсчитать как количество тепла, протекающего за время dt через поверхность Σ, ограничивающую объем Ω. Количество тепла, протекающего за время dt через элементарную площадку $d\sigma$, равно (см. п. 1 § 2)

$$dtk\,(\operatorname{grad} U)_n\, d\sigma,$$

а количество тепла, протекающего за это время через всю поверхность Σ, выразится интегралом

$$dt \iint_{\Sigma} k\,(\operatorname{grad} U)_n\, d\sigma.$$

Преобразовав этот интеграл по формуле Остроградского в объемный, получим

$$dt \iint_{\Sigma} k\,(\operatorname{grad} U)_n\, d\sigma = dt \iiint_{\Omega} k \operatorname{div}(\operatorname{grad} U)\, dv = dt \iiint_{\Omega} k\,\Delta U\, dv.$$

Приравняв друг другу полученные выражения для ΔQ и сократив на dt, будем иметь

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} c\rho\, dv = \iiint_{\Omega} k\,\Delta U\, dv.$$

Так как это равенство должно иметь место для любой пространственной области Ω, то отсюда следует

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\,\Delta U \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right). \tag{6.32}$$

Мы получили уравнение, которому должна удовлетворять функция U, представляющая собой температуру некоторого тела, т. е. так называемое *уравнение теплопроводности*.

3. Стационарное распределение температур. Гармонические поля. Мы показали, что распределение температур внутри тела должно удовлетворять уравнению (6.32). Может, в частности, оказаться, что рассматриваемое нами тело находится в состоянии теплового равновесия, т. е. что ни на границе его, ни во внутренних точках температура не меняется со временем. Тогда $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ и уравнение (6.32) принимает вид

$$\Delta U = 0,$$

т. е. в декартовых координатах

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Состояние теплового равновесия можно представить себе следующим образом. Предположим, что на границе тела в каждой точке поддерживается некоторая фиксированная температура, не зависящая от времени (но разная, вообще говоря, в разных точках). Тогда то распределение температур, которое установится внутри тела через достаточно большой (строго говоря, бесконечно большой) промежуток времени, и будет тем равновесным распределением температур, которое соответствует заданному тепловому режиму на поверхности тела.

Уравнение

$$\Delta U = 0$$

называется *уравнением Лапласа*. С его помощью описывается не только стационарное распределение тепла. Уравнение Лапласа играет первостепенную роль при описании и других установившихся процессов, например равновесного распределения зарядов по поверхности проводника, установившегося движения несжимаемой жидкости в замкнутом сосуде и т. д. Скалярное поле $U(x, y, z)$, удовлетворяющее условию $\Delta U = 0$, называется *лапласовым* или *гармоническим* полем. Стационарное распределение температур внутри некоторого тела представляет собой, согласно сказанному выше, гармоническое поле.

Один из важных примеров гармонического поля — это функция

$$\frac{k}{r} \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ k = \text{const}\right).$$

Эту функцию можно представлять себе как потенциал поля тяготения (или электростатического поля), создаваемого точечной массой (точечным зарядом), помещенной в начале координат. Проверим, что эта функция — гармоническая (кроме начала координат, где она не определена). Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{k}{r} = -\frac{kx}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{k}{r} = -k\,\frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = k\,\frac{3x^2 - r^2}{r^5},$$

и аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{k}{r} = k\,\frac{3y^2 - r^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{k}{r} = k\,\frac{3z^2 - r^2}{r^5},$$

откуда

$$\Delta\left(\frac{k}{r}\right)=0.$$

Гармонической будет и функция $\frac{k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ при любом фиксированном $\mathbf{r}_0$, а следовательно, и любая линейная комбинация вида

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|},$$

представляющая собой потенциал, создаваемый системой точечных масс. Предельный переход от точечного распределения масс к непрерывному с плотностью $\mu(x, y, z)$, естественный здесь с точки зрения физики, потребовал бы для своего математического обоснования применения теории интегралов, зависящих от параметра, которые будут рассмотрены в гл. 10. Систематическое изложение всего круга вопросов, связанных с понятием потенциала, имеется в учебниках по математической физике.

Упражнения. 1. Напишите потенциал поля тяготения, создаваемого массой, непрерывно распределенной по пространству с плотностью $\mu(x, y, z)$.

2. Каков потенциал электростатического поля, создаваемого бесконечной, равномерно заряженной нитью. Будет ли этот потенциал гармонической функцией?

§ 7. Запись основных дифференциальных операций теории поля в ортогональных криволинейных координатах

1. Постановка задачи. Такие величины, как градиент, дивергенция, ротор и другие, часто встречаются в различных задачах теоретической и математической физики. Во многих случаях полезно уметь записывать эти величины не только в декартовых координатах, как это было сделано выше, но и в тех или иных криволинейных системах координат. Предположим, например, что рассматривается поле, обладающее сферической симметрией, т. е. в каждой точке рассматривается величина, скалярная или векторная, зависящая только от расстояния этой точки до начала координат. Ясно, что все формулы, связанные с таким полем, должны значительно упроститься, если записывать их в сферических координатах, а не в декартовых. В других случаях могут оказаться удобными какие-либо иные системы координат.

В этом параграфе мы запишем в криволинейных координатах выражения для градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа.