

откуда

$$\Delta \left(\frac{k}{r} \right) = 0.$$

Гармонической будет и функция $\frac{k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ при любом фиксированном \mathbf{r}_0 , а следовательно, и любая линейная комбинация вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|},$$

представляющая собой потенциал, создаваемый системой точечных масс. Предельный переход от точечного распределения масс к непрерывному с плотностью $\mu(x, y, z)$, естественный здесь с точки зрения физики, потребовал бы для своего математического обоснования применения теории интегралов, зависящих от параметра, которые будут рассмотрены в гл. 10. Систематическое изложение всего круга вопросов, связанных с понятием потенциала, имеется в учебниках по математической физике.

Упражнения. 1. Напишите потенциал поля тяготения, создаваемого массой, непрерывно распределенной по пространству с плотностью $\mu(x, y, z)$.

2. Каков потенциал электростатического поля, создаваемого бесконечной, равномерно заряженной нитью. Будет ли этот потенциал гармонической функцией?

§ 7. Запись основных дифференциальных операций теории поля в ортогональных криволинейных координатах

1. Постановка задачи. Такие величины, как градиент, дивергенция, ротор и другие, часто встречаются в различных задачах теоретической и математической физики. Во многих случаях полезно уметь записывать эти величины не только в декартовых координатах, как это было сделано выше, но и в тех или иных криволинейных системах координат. Предположим, например, что рассматривается поле, обладающее сферической симметрией, т. е. в каждой точке рассматривается величина, скалярная или векторная, зависящая только от расстояния этой точки до начала координат. Ясно, что все формулы, связанные с таким полем, должны значительно упроститься, если записывать их в сферических координатах, а не в декартовых. В других случаях могут оказаться удобными какие-либо иные системы координат.

В этом параграфе мы запишем в криволинейных координатах выражения для градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа.

2. Криволинейные ортогональные координаты в пространстве.

Предположим, что в трехмерном пространстве введена некоторая система криволинейных координат q_1, q_2, q_3 *) и пусть

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (6.33)$$

— формулы, связывающие декартовы координаты x, y, z с криволинейными координатами q_1, q_2, q_3 .

Мы ограничимся простейшим и в то же время практически наиболее важным случаем ортогональных координат (система криволинейных координат называется *ортогональной*, если в любой точке три координатные линии, проходящие через эту точку, ортогональны между собой). Свойством ортогональности обладают, в частности, такие употребительные в пространстве системы координат, как сферическая и цилиндрическая.

Найдем прежде всего выражения для элементов длины, площади и объема в ортогональных координатах.

Для этой цели рассмотрим бесконечно малый криволинейный параллелепипед, вырезаемый тремя парами координатных поверхностей, отвечающих соответственно значениям параметров q_1, q_2, q_3 , равным q_1 и $q_1 + dq_1$; q_2 и $q_2 + dq_2$, q_3 и $q_3 + dq_3$ (рис. 6.13).

Рассмотрим сначала ребро MM_1 . Точка M имеет криволинейные координаты (q_1, q_2, q_3) , а точка M_1 — криволинейные координаты $(q_1 + dq_1, q_2, q_3)$. Обозначив декартовы координаты точки M через x, y, z , а декартовы координаты точки M_1 — через $x + dx, y + dy, z + dz$, мы можем написать, что длина dl_1 вектора MM_1 равна

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Вдоль ребра MM_1 координаты x, y, z суть функции переменной q_1 (q_2 и q_3 постоянны вдоль MM_1). Следовательно, в данном случае

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1$$

*) С понятием криволинейных координат в пространстве мы уже встречались в гл. 2. Мы будем предполагать, что функции, связывающие криволинейные координаты с декартовыми, удовлетворяют тем условиям, которые формулировались в гл. 2 § 4. Для большей симметрии формул мы будем здесь обозначать криволинейные координаты несколько иначе, чем в гл. 2, а именно, одной буквой с индексами 1, 2, 3. Аналогично компоненты векторного поля \mathbf{A} (в той системе координат, которая будет рассматриваться), мы обозначим A_1, A_2, A_3 .

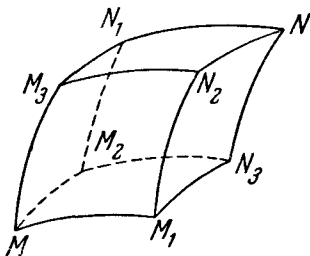


Рис. 6.13.

и

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} dq_1.$$

Аналогично для длин dl_2 и dl_3 ребер MM_2 и MM_3 получаем следующие выражения:

$$dl_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} dq_2,$$

$$dl_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} dq_3.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}, \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

перепишем формулы для dl_1 , dl_2 и dl_3 так:

$$dl_1 = H_1 dq_1, \quad dl_2 = H_2 dq_2, \quad dl_3 = H_3 dq_3. \quad (6.35)$$

Множители H_1 , H_2 , H_3 называются *параметрами Ламэ*, отвечающими криволинейным координатам q_1 , q_2 , q_3 ; их называют также *масштабными множителями*. Координатные линии, вдоль каждой из которых меняется только один параметр, следует представлять себе как кривые, на которые нанесены шкалы значений этих параметров. Множители H_1 , H_2 , H_3 на этих кривых преобразуют «нестественные» параметры q_1 , q_2 , q_3 в «естественные» — длины дуг соответствующих линий.

Наша система координат ортогональная, поэтому площадь $d\sigma_1$ грани $MM_2N_1M_3$ равна произведению dl_2 на dl_3 , т. е.

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3;$$

аналогично для площадей $d\sigma_2$ и $d\sigma_3$ двух других граней $MM_1N_2M_3$ и $MM_1N_3M_2$ имеем

$$d\sigma_2 = H_3 H_1 dq_3 dq_1 \quad \text{и} \quad d\sigma_3 = H_1 H_2 dq_1 dq_2. \quad (6.36)$$

Наконец, объем всего рассматриваемого бесконечно малого параллелепипеда равен

$$dv = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (6.37)$$

Введем в точке M ортогональный и нормированный базис, состоящий из трех единичных векторов e_1 , e_2 , e_3 , касательных к координатным

линиям, проходящим через точку M . Заметим, что в отличие от декартовой системы координат, определяемой тремя постоянными единичными векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, этот базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ будет меняться от точки к точке, т. е. сами векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ представляют собой функции параметров q_1, q_2, q_3 . Это не мешает нам, однако, любой вектор, заданный в произвольной точке M (т. е. любое векторное поле), записать в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

3. Цилиндрические и сферические координаты. Вычислим параметры Ламэ для важнейших частных типов ортогональных криволинейных координат: цилиндрической и сферической систем. Цилиндрические координаты r, φ, z связаны с декартовыми координатами формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Отсюда по формулам (6.34) получаем

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = r, \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned} \right\} (6.38)$$

Благодаря тому что параметры Ламэ имеют непосредственный геометрический смысл, эти результаты нетрудно усмотреть геометрически без всяких вычислений. Рассмотрим бесконечно малый параллелепипед, ограниченный тремя парами координатных поверхностей, отвечающих значениям цилиндрических координат, соответственно равным r и $r + dr$, φ и $\varphi + d\varphi$, z и $z + dz$ (рис. 6.14). Длины dl_1, dl_2 и dl_3 ребер AB, AC и AD этого параллелепипеда соответственно равны $dr, r d\varphi$ и dz , откуда сразу следуют формулы (6.38).

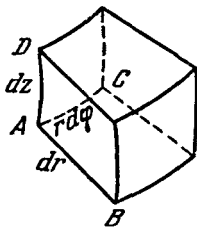


Рис. 6.14.

Аналогично для сферических координат, задаваемых равенствами

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta,$$

вычисление дает

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = \rho \sin \theta. \quad (6.39)$$

Этот результат тоже виден непосредственно из чертежа (рис. 6.15), так как длины dl_1, dl_2 и dl_3 ребер AB, AC и AD параллелепипеда, ограниченного координатными поверхностями, отвечающими значениям сферических координат ρ и $\rho + d\rho$, φ и $\varphi + d\varphi$, θ и $\theta + d\theta$.

соответственно равны

$$d\rho, \rho d\theta \text{ и } \rho \sin\theta d\varphi,$$

откуда сразу получаем (6.39).

4. Градиент. Найдем выражение градиента в ортогональных криволинейных координатах. Проекция градиента функции $U = U(q_1, q_2, q_3)$ на некоторое направление совпадает, как известно, с производной от U по этому направлению. Следовательно, для того чтобы вычислить компоненты вектора $\text{grad } U$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, нужно вычислить производные от U по направлениям, определяемым этими векторами. Пусть ΔU — разность значений функции U в точках M_1 и M . Тогда

$$(\text{grad } U, \mathbf{e}_1) = \lim_{dl_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{dl_1} =$$

$$= \lim_{dq_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{H dq_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

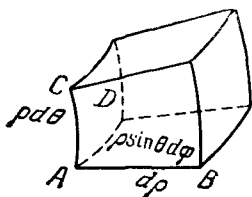


Рис. 6.15.

Аналогично две другие компоненты градиента равны

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \text{ и } \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3}.$$

Таким образом, окончательно,

$$\text{grad } U = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \mathbf{e}_3. \quad (6.40)$$

5. Дивергенция. Вычислим теперь дивергенцию некоторого векторного поля \mathbf{A} в координатах q_1, q_2, q_3 . В § 2 мы определили $\text{div } \mathbf{A}$ в точке M формулой

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{v(\Omega)} \iint_{\Sigma} A_n d\sigma.$$

Следовательно, мы можем вычислить $\text{div } \mathbf{A}$ в точке M как отношение потока вектора \mathbf{A} через поверхность бесконечно малого параллелепипеда, изображенного на рис. 6.13, к объему dv этого параллелепипеда. Обозначим A_1, A_2, A_3 компоненты вектора \mathbf{A} в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (т. е. положим $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$) и вычислим сначала поток этого вектора через две грани, перпендикулярные ребру MM_1 .

Внешняя нормаль к грани $MM_2N_1M_3$ совпадает с вектором $-\mathbf{e}_1$ (вектор \mathbf{e}_1 направлен в сторону возрастания q_1 , а внешняя нормаль к рассматриваемой грани имеет противоположное направление). Следо-

вательно, поток вектора \mathbf{A} через эту грань равен (с точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно $d\sigma$)

$$(\mathbf{A}, -\mathbf{e}_1) d\sigma_1 = -A_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3, \quad (6.41)$$

где величины A_1, H_2, H_3 берутся в точке (q_1, q_2, q_3) .

Противоположная грань $M_1 N_3 N N_2$ отличается от рассмотренной тем, что на ней первая криволинейная координата равна $q_1 + dq_1$ (а не q_1); следовательно, значение величины $A_1 H_2 H_3$ на этой грани отличается от ее значения на грани $M M_2 N_1 M_3$ приращением

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) dq_1.$$

Кроме того, направление нормали к грани $M_1 N_3 N N_2$ совпадает с направлением вектора \mathbf{e}_1 . Поэтому поток вектора \mathbf{A} через грань $M_1 N_3 N N_2$ равен

$$\left[A H_2 H_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) dq_1 \right] dq_2 dq_3. \quad (6.42)$$

Сложив выражения (6.41) и (6.42), получим, что поток вектора \mathbf{A} через две параллельные между собой грани $M M_2 N_1 M_3$ и $M_1 N_3 N N_2$ равен

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) dq_1 dq_2 dq_3.$$

Аналогично, рассматривая две другие пары параллельных между собой граней, получим следующие два выражения для потока вектора через эти пары граней:

$$\frac{\partial (A_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3 \quad \text{и} \quad \frac{\partial (A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Складывая все эти три величины и деля на $d\sigma$, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (A_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right]. \quad (6.43)$$

6. Ротор. В § 4 мы показали, что проекция $(\operatorname{rot} \mathbf{A})_n$ ротора векторного поля \mathbf{A} в некоторой точке M на направление некоторого фиксированного вектора \mathbf{n} представляется формулой

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_n = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{1}{\sigma} \int_L A_\tau dl,$$

где Σ — площадка, перпендикулярная вектору \mathbf{n} , σ — ее площадь и L — ее граница. Следовательно, мы можем получить проекцию $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ на направление вектора \mathbf{e}_1 , вычислив циркуляцию \mathbf{A} вдоль контура $M M_2 N_1 M_3 M$ (рис. 6.13) и разделив ее на $d\sigma_1$. Представим эту циркуляцию в виде суммы четырех слагаемых, отвечающих отрезкам

MM_2 , M_2N_1 , N_1M_3 и M_3M , и вычислим каждое слагаемое отдельно. Начнем с первого из них. Проекция вектора \mathbf{A} на направление MM_2 равна A_2 , следовательно, циркуляция вектора \mathbf{A} вдоль MM_2 равна (с точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно $d\sigma_1$)

$$A_2 dl_2 = A_2 H_2 dq_2, \quad (6.44)$$

где величины A_2 и H_2 берутся в точке (q_1, q_2, q_3) . Циркуляция вдоль N_1M_3 отличается от только что полученного выражения тем, что на N_1M_3 третья координата равна $q_3 + dq_3$, а не q_3 , как на MM_2 , и, кроме того, направление отрезка N_1M_3 противоположно направлению \mathbf{e}_2 . Поэтому циркуляция вдоль N_1M_3 равна

$$- \left[A_2 H_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 H_2) dq_3 \right] dq_2. \quad (6.45)$$

Аналогично получаем для циркуляций вдоль M_2N_1 и N_3M выражения

$$\left[A_3 H_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 H_3) dq_2 \right] dq_3 \quad (6.46)$$

и

$$- A_3 H_3 dq_3. \quad (6.47)$$

Сложив величины (6.44), (6.45), (6.46) и (6.47), получим, что циркуляция вектора \mathbf{A} вдоль контура $MM_2N_1N_3M$ равна

$$- \frac{\partial (A_2 H_2)}{\partial q_3} dq_2 dq_3 + \frac{\partial (A_3 H_3)}{\partial q_2} dq_2 dq_3.$$

Деля полученное выражение на $H_2 H_3 dq_2 dq_3$, т. е. на площадь грани $MM_2N_1M_3$, получаем, что компонента $(\text{rot } \mathbf{A})_1$ вектора $\text{rot } \mathbf{A}$ в направлении базисного вектора \mathbf{e}_1 равна

$$\frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial (A_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (A_2 H_2)}{\partial q_3} \right\}. \quad (6.48_1)$$

Аналогично вычисляются две другие компоненты:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial (A_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (A_3 H_3)}{\partial q_1} \right\}, \quad (6.48_2)$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial (A_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (A_1 H_1)}{\partial q_2} \right\}. \quad (6.48_3)$$

7. Оператор Лапласа. Исходя из найденных выражений для $\text{grad } U$ и $\text{div } \mathbf{A}$, мы можем написать выражение оператора Лапласа в координатах q_1, q_2, q_3 . Получаем

$$\Delta U = \text{div grad } U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right\}. \quad (6.49)$$

Эту формулу очень легко запомнить, если знать ее «происхождение». Множители Ламэ H_1, H_2, H_3 в знаменателях при $\partial q_1, \partial q_2, \partial q_3$ возникли из-за градиента. Множители $H_2 H_3, H_3 H_1, H_1 H_2$ в числителях возникли из площадей тех площадок, через которые вычисляется поток, множитель $\frac{1}{H_1 H_2 H_3}$ возник из-за того, что поток через грани параллелепипеда делится на объем параллелепипеда.

8. Запись основных формул в цилиндрических и сферических координатах. Выше, в п. 3, мы уже нашли параметры Ламэ для цилиндрических и сферических координат. Чтобы написать в этих системах координат формулы для градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа, нужно лишь подставить эти параметры в полученные выше общие формулы. Таким образом, находим:

а) для цилиндрических координат:

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z, \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \\ \Delta U &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \end{aligned}$$

б) для сферических координат:

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial (\rho^2 A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial (A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\rho + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi, \\ \Delta U &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

В задачах, связанных с рассмотрением оператора Лапласа в сферических координатах, часто наряду с полным оператором Лапласа ΔU встречается выражение

$$\frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2},$$

называемое «угловой частью» оператора Лапласа.

Замечание. В этом параграфе мы систематически пользовались такими понятиями, как «бесконечно малый параллелепипед», «элемент объема» и т. д. Ясно, что здесь, как и в других подобных случаях, смысл этих выражений состоит в том, что мы рассматриваем сначала объекты конечных размеров, а затем совершаем предельный переход, стремя эти размеры к нулю. Мы полагаем, что при желании читатель может проделать самостоятельно все те предельные переходы, которые здесь лишь подразумевались, но не излагались.

§ 8. Переменные поля в сплошных средах

До сих пор мы, изучая те или иные поля, интересовались в основном зависимостью соответствующих величин (скалярных или векторных) от пространственных координат. Сейчас мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с зависимостью поля от времени.

1. Локальная и материальная производные. Рассмотрим движущуюся жидкость, скорость которой в каждой точке зависит не только от координат этой точки, но и от времени. Пусть, далее, с этой жидкостью связана некоторая переменная величина φ , например температура, давление и т. п. Изучая изменение этой величины φ с течением времени, мы можем поступать двояким образом: или следить за ее изменением в данной точке, т. е. при фиксированных значениях x , y и z , или же рассматривать значение этой величины для данной частицы (координаты которой меняются с течением времени). Например, если речь идет о температуре потока жидкости, то ее можно измерять термометром, укрепленным неподвижно, или же термометром, который плавает в этом потоке. Изменение с течением времени некоторой величины $\varphi(M, t)$ в данной точке M характеризуется так называемой *частной* или *локальной* производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(M, t + \Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t}, \quad (6.50)$$

при вычислении которой точка M рассматривается как фиксированная.

Изменение с течением времени величины $\varphi(M, t)$ для данной частицы характеризуется *полной* или *материальной* производной $\varphi(M, t)$ по t , которая определяется следующим образом.

Пусть M — положение данной частицы в момент t , а M' — положение этой же частицы в момент $t + \Delta t$. Полной производной φ по t называется

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(M', t + \Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t}. \quad (6.51)$$