Замечание. В этом параграфе мы систематически пользовались такими понятиями, как «бесконечно малый параллелепипед», «элемент объема» и т. д. Ясно, что здесь, как и в других подобных случаях, смысл этих выражений состоит в том, что мы рассматриваем сначала объекты конечных размеров, а затем совершаем предельный переход, стремя эти размеры к нулю. Мы полагаем, что при желании читатель может проделать самостоятельно все те предельные переходы, которые здесь лишь подразумевались, но не излагались.

§ 8. Переменные поля в сплошных средах

До сих пор мы, изучая те или иные поля, интересовались в основном зависимостью соответствующих величин (скалярных или векторных) от пространственных координат. Сейчас мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с зависимостью поля от времени.

1. Локальная и материальная производные. Рассмотрим движущуюся жидкость, скорость которой в каждой точке зависит не только от координат этой точки, но и от времени. Пусть, далее, с этой жидкостью связана некоторая переменная величина φ, например температура, давление и т. п. Изучая изменение этой величины φ с течением времени, мы можем поступать двояким образом: или следить за ее изменением в данной точке, т. е. при фиксированных значениях x, y и z, или же рассматривать значение этой величины для данной частицы (координаты которой меняются с течением времени). Например, если речь идет о температуре потока жидкости, то ее можно измерять термометром, укрепленным неподвижно, или же термометром, который плывет в этом потоке. Изменение с течением времени некоторой величины $\varphi(M, t)$ в данной точке M характеризуется так называемой *частной* или *локальной* производной

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(M, t+\Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t}, \tag{6.50}$$

при вычислении которой точка M рассматривается как фиксированная.

Изменение с течением времени величины $\varphi(M, t)$ для данной частицы характеризуется *полной* или *материальной* производной $\varphi(M, t)$ по t, которая определяется следующим образом.

Пусть M — положение данной частицы в момент t, а M' — положение этой же частицы в момент $t+\Delta t$. Полной производной φ по t называется

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(M', t+\Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t}. \tag{6.51}$$

Чтобы установить связь между локальной и материальной производными, заметим, что, вычисляя материальную производную, мы должны считать координаты x, y и z точки M функциями от t, причем их производные по t — это компоненты скорости потока в точке M:

$$\frac{dx}{dt}=v_x, \quad \frac{dy}{dt}=v_y, \quad \frac{dz}{dt}=v_z.$$

Поэтому, дифференцируя $\varphi=\varphi(x, y, z, t)$ как сложную функцию от t, получаем

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}v_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}v_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}v_z,$$

т. е.

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\mathbf{v}, \operatorname{grad}\varphi). \tag{6.52}$$

Аналогичным образом можно ввести понятия частной и полной производной по времени и для какой-либо векторной величины $\mathbf{A}(M, t)$, связанной с движущейся средой. Эти производные определяются формулами

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{A}(M, t+\Delta t)-\mathbf{A}(M, t)}{\Delta t}, \tag{6.53}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{A}(M, t+\Delta t)-\mathbf{A}(M, t)}{\Delta t}, \tag{6.54}$$

аналогичными формулам (6.50) и (6.51). Связь между этими производными дается формулой

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}v_x+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}v_y+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}v_z, \tag{6.55}$$

которая получится дифференцированием $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ как сложной функции от t. Равенства (6.52) и (6.55) удобно записать в виде

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\mathbf{v}, \nabla)\varphi \tag{6.56}$$

и

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{A}, \tag{6.57}$$

понимая под $(\mathbf{v}, \nabla)$ оператор

$$v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z},$$

т. е. «скалярное произведение» вектора скорости $\mathbf{v}$ и символического вектора ∇.

Слагаемые $(\mathbf{v}, \nabla)\varphi$ и $(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{A}$, входящие в формулы (6.56) и (6.57), называются *конвективными* членами; они связаны с переносом (конвекцией) частиц и возникают только при рассмотрении движущейся среды.

Рассмотрим в качестве примера ускорение частицы движущейся жидкости. Оно представляет собой полную (т. е. относящуюся к фиксированной частице) производную скорости. Воспользовавшись формулой (6.56), получаем

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v},\ \nabla)\,\mathbf{v}, \tag{6.58}$$

т. е. в координатной записи

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z},$$

и аналогично для двух других компонент.

2. Уравнение Эйлера. Воспользуемся понятиями материальной и локальной производных для вывода одного из основных уравнений гидродинамики — так называемого уравнения Эйлера.

Рассмотрим внутри движущейся жидкости некоторый объем Ω, ограниченный поверхностью Σ. На элемент $d\sigma$ этой поверхности действует сила — давление, равное — $p\mathbf{n}\,d\sigma$, направленное по нормали *) к $d\sigma$ (здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали, а p — скалярная величина). Сила $\mathbf{F}$, действующая на всю поверхность Σ, запишется в виде

$$\mathbf{F}=-\iint\limits_{\Sigma} p\mathbf{n}\,d\sigma, \tag{6.59}$$

где, как всегда, под интегралом от вектора

$$p\mathbf{n}=p\cos(\mathbf{n},\ x)\,\mathbf{i}+p\cos(\mathbf{n},\ y)\,\mathbf{j}+p\cos(\mathbf{n},\ z)\,\mathbf{k}$$

понимается вектор с компонентами

$$\iint\limits_{\Sigma} p\cos(\mathbf{n},\ x)\,d\sigma,\qquad \iint\limits_{\Sigma} p\cos(\mathbf{n},\ y)\,d\sigma\qquad \text{и}\qquad \iint\limits_{\Sigma} p\cos(\mathbf{n},\ z)\,d\sigma. \tag{6.60}$$

Интеграл (6.59) можно преобразовать в тройной интеграл по объему, применив формулу Остроградского к каждой из компонент (6.60)

*) Мы считаем, что рассматриваемая жидкость идеальная, т. е. имеет нулевую вязкость. В этом случае давление на любую бесконечно малую площадку внутри жидкости направлено по нормали к этой площадке.

этого вектора. Получим

$$-\int_{\Sigma}\int p\,\mathbf{n}\,d\sigma = -\mathbf{i}\int\int_{\Omega}\int \frac{\partial p}{\partial x}\,d\omega - \mathbf{j}\int\int_{\Omega}\int \frac{\partial p}{\partial y}\,d\omega - $$
$$-\mathbf{k}\int\int_{\Omega}\int \frac{\partial p}{\partial z}\,d\omega = -\int\int_{\Omega}\int \operatorname{grad} p\,d\omega,$$

следовательно, на каждый элемент $d\omega$ объема жидкости действует сила

$$-\operatorname{grad} p\,d\omega.$$

С другой стороны, если $\rho(M, t)$ — плотность жидкости в данной точке M в момент t, а $\mathbf{w}$ — ускорение частицы, находящейся в этой точке, то $\mathbf{w}\rho(M, t)\,d\omega$ представляет собой произведение массы, содержащейся в объеме $d\omega$, на ускорение, и, следовательно, по закону Ньютона имеет место равенство

$$\mathbf{w}\rho\,d\omega = -\operatorname{grad} p\,d\omega,$$

т. е.

$$\mathbf{w}\rho = -\operatorname{grad} p. \tag{6.61}$$

Это и есть основное уравнение свободного движения идеальной жидкости, называемое обычно *уравнением Эйлера* *). Здесь под $\mathbf{w}$ понимается ускорение частицы жидкости, т. е. полная производная скорости по времени $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Воспользовавшись выражениями для компонент ускорения, найденными в конце п. 1, мы можем переписать уравнение Эйлера в координатной форме:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\rho = -\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\rho = -\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\rho = -\frac{\partial p}{\partial z}.$$

3. Производная по времени от интеграла по жидкому объему. Рассмотрим в движущейся среде некоторый объем Ω. Мы будем называть этот объем *жидким*, если он во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц жидкости. Следовательно, жидкий

---

*) Знак минус в правой части уравнения (6.61) имеет ясный физический смысл: понятно, что ускорение каждой частицы жидкости направлено в сторону уменьшения давления, т. е. против градиента p.

объем с течением времени перемещается и деформируется. Рассмотрим интеграл

$$J = \iiint_{\Omega} \varphi \, d\omega \qquad (6.62)$$

от некоторой скалярной функции $\varphi(M, t)$ по такому жидкому объему и вычислим производную этого интеграла по времени.

При вычислении этой производной мы должны учесть, что интеграл (6.62) зависит от времени двояким образом: во-первых, от t зависит подынтегральная функция, а во-вторых, при изменении t меняется и та пространственная область, по которой интеграл берется *).

Если бы изменения объема Ω не происходило, то за время dt функция φ получила бы приращение $\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$, а интеграл (6.62) получил бы при этом приращение

$$dt \iiint_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, d\omega.$$

Рассмотрим теперь изменение интеграла (6.62), вызванное изменением объема Ω. Обозначим Σ поверхность, ограничивающую объем Ω в момент t. Изменение объема Ω за время dt происходит, очевидно, за счет того, что некоторые частицы жидкости за это время втекают или вытекают через поверхность Σ. Через элемент $d\sigma$ поверхности Σ за время dt вытекает объем жидкости, равный $v_n \, dt \, d\sigma$, где v_n — проекция скорости жидкости на внешнюю нормаль к $d\sigma$. Это изменение объема даст интегралу (6.62) приращение

$$\varphi v_n \, dt \, d\sigma,$$

а все изменение интеграла (6.62), вызванное изменением объема Ω за время dt, равно

$$dt \iint_{\Sigma} \varphi v_n \, d\sigma.$$

Таким образом, полное изменение интеграла (6.62) за время dt равно

$$dJ = dt \iiint_{\Omega} \frac{d\varphi}{\partial t} \, d\omega + dt \iint_{\Sigma} \varphi v_n \, d\sigma$$

*) Интеграл (6.62) представляет собой так называемый интеграл, зависящий от параметра, причем от параметра t зависят и подынтегральная функция и область интегрирования. Основы теории интегралов, зависящих от параметра, будут изложены в гл. 10. Здесь мы, не опираясь на общую теорию, рассмотрим лишь вопрос о вычислении производной интеграла (6.62) по времени, важный с точки зрения физических приложений.

и, следовательно,

$$\frac{dJ}{dt}=\iiint_{\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,d\omega+\iint_{\Sigma}\varphi v_n\,d\sigma. \qquad (6.63)$$

Преобразовав второе слагаемое в правой части этого равенства по формуле Остроградского, получим

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega}\varphi\,d\omega=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{div}(\varphi\mathbf{v})\right]d\omega. \qquad (6.64)$$

Наконец, воспользовавшись равенством

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{v})=\varphi\operatorname{div}\mathbf{v}+(\mathbf{v},\ \operatorname{grad}\varphi)$$

(см. (6.29)) и выражением (6.52) для полной производной, получаем окончательно

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega}\varphi\,d\omega=\iiint_{\Omega}\left(\frac{d\varphi}{dt}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{v}\right)d\omega. \qquad (6.65)$$

В частности, если $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ (т. е. рассматривается движение несжимаемой жидкости, без стоков и источников), то формула (6.65) принимает более простой вид:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega}\varphi\,d\omega=\iiint_{\Omega}\frac{d\varphi}{dt}\,d\omega.$$

Замечание. Рассмотренная нами задача о дифференцировании интеграла, взятого по жидкому объему, аналогична следующей одномерной задаче (с которой мы еще встретимся в гл. 10): вычислить производную по t от интеграла

$$J(t)\equiv\int_{a(t)}^{b(t)}\varphi(x,\ t)\,dx.$$

Рассматривая $J(t)$ как сложную функцию от $a(t)$, $b(t)$ и t, легко получаем, что

$$J'(t)=\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx+\varphi(b(t),\ t)\,b'(t)-\varphi(a(t),\ t)\,a'(t).$$

Здесь опять-таки $J'(t)$ представляет собой сумму двух слагаемых, первое из которых определяется изменением подынтегральной функции, а второе — изменением области интегрирования.

Мы рассмотрели выше интеграл по жидкому объему от скалярной функции. Аналогичным образом можно рассмотреть интеграл по жидкому объему от векторной функции $\mathbf{A}(M, t)$. Для производной этого интеграла по t получается с помощью тех же рассуждений формула

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega} \mathbf{A}\, d\omega = \iiint_{\Omega}\left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{v}\right] d\omega. \qquad (6.66)$$

Выше речь шла об интегрировании по жидким объемам. В гидродинамике и других разделах физики приходится рассматривать, наряду с жидкими объемами, жидкие поверхности и линии. Они определяются как поверхности и линии, состоящие из фиксированных частиц жидкости и, следовательно, меняющие с течением времени форму и положение в пространстве в соответствии с движением жидкости. Поверхностные или криволинейные интегралы по таким жидким поверхностям или линиям от тех или иных функций опять-таки представляют собой выражения, зависящие от времени двояким образом (от времени зависят и область интегрирования и подынтегральная функция). Применяя те же рассуждения, что и в случае жидких объемов, нетрудно получить формулы для дифференцирования таких поверхностных и криволинейных интегралов по времени.

4. Другой вывод уравнения неразрывности. Из формулы (6.63) сразу вытекает уравнение неразрывности, полученное нами в п. 5 § 3. Пусть $\rho(M, t)$ — плотность движущейся (сжимаемой) жидкости. Масса T этой жидкости, заключенной в некотором объеме Ω, равна

$$T = \iiint_{\Omega} \rho\, d\omega.$$

Если объем Ω жидкий, то масса внутри этого объема остается постоянной. Следовательно (см. (6.64)),

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega} \rho\, d\omega = \iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right] d\omega = 0.$$

Так как объем Ω произволен, то отсюда получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

т. е. уравнение неразрывности.