ГЛАВА 7

ТЕНЗОРЫ

В естествознании и технике приходится иметь дело с физическими величинами различной математической природы. Это различие проявляется, в частности, в характере их аналитического выражения и в законах преобразования их аналитического выражения при переходе от одной системы координат в пространстве к другой.

Простейшими, с точки зрения математической природы, физическими величинами являются с к а л я р н ы е величины, например масса тела, объем тела, длина вектора и т. п., инвариантные относительно преобразований координат. Каждая такая скалярная величина в любой системе координат выражается одним числом, причем это число не зависит от выбора системы координат.

Следующими по сложности математической природы являются величины в е к т о р н ы е, например скорость, ускорение, сила и т. п. Векторная величина в трехмерном пространстве в каждом базисе определяется тройкой чисел — тройкой проекций вектора на оси координат, или, как говорят, «тройкой координат вектора в данном базисе», причем эти «координаты вектора» при переходе от одного базиса к другому преобразуются по определенному закону.

Следующими после векторов по сложности математической природы являются физические величины, называемые *тензорами*, играющие роль линейных операторов над векторами (по поводу понятия линейного оператора см. п. 1 § 2). Такого рода величиной описываются, например, проводимость в анизотропном теле.

А именно, в изотропном теле вектор плотности тока $\mathbf{j}$ и вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ коллинеарны, т. е. связаны соотношением

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{7.1}$$

где σ — скалярный множитель ($\sigma > 0$), называемый проводимостью. В анизотропном теле $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ уже, вообще говоря, не коллинеарны и множитель σ является линейным оператором, преобразующим вектор $\mathbf{E}$ в вектор $\mathbf{j}$; этот оператор называется «т е н з о р о м» проводимости.

Если выбрать в пространстве какой-либо определенный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и разложить по этому базису $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= j_1\mathbf{e}_1 + j_2\mathbf{e}_2 + j_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{E} &= E_1\mathbf{e}_1 + E_2\mathbf{e}_2 + E_3\mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{7.2}$$

то равенство (7.1) можно заменить эквивалентной системой трех скалярных равенств

$$j_k = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ki} E_i, \qquad k = 1,\ 2,\ 3. \tag{7.1$'$}$$

Таким образом, тензор проводимости σ в каждом базисе определяется девятью числами σ_{ki}, $k, i = 1, 2, 3$, которые называются *координатами тензора* σ в данном базисе.

В определение тензора входит описание преобразования его координат при переходе от одного базиса к другому.

В §§ 1—9 мы ограничимся переходами лишь в множестве всех ортогональных нормированных базисов и изучением соответствующих им аффинных ортогональных тензоров. В § 10 мы остановимся кратко на обобщениях.

§ 1. Понятие аффинного ортогонального тензора

1. Преобразования ортогональных нормированных базисов. Рассмотрим два каких-либо ортогональных нормированных базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ в трехмерном евклидовом пространстве. Из ортогональности и нормированности базисов вытекают следующие соотношения для скалярных произведений:

$$(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}, \quad (\mathbf{e}'_i,\ \mathbf{e}'_k) = \delta_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq k, \\ 1 & \text{при} \quad i = k. \end{cases} \tag{7.3}$$

Базисы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ будем условно называть «старым» и «новым». Разложив векторы нового базиса по старому, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{7.4}$$

или, короче,

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\mathbf{e}_j, \qquad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{7.4$'$}$$

Матрица

$$\|\alpha_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} \tag{7.5}$$

называется *матрицей перехода* от старого базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к новому базису $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$.

Изучим свойства этой матрицы. Умножая вектор $\mathbf{e}'_i = \alpha_{i1}\mathbf{e}_1 + \alpha_{i2}\mathbf{e}_2 + \alpha_{i3}\mathbf{e}_3$ скалярно на вектор $\mathbf{e}'_j = \alpha_{j1}\mathbf{e}_1 + \alpha_{j2}\mathbf{e}_2 + \alpha_{j3}\mathbf{e}_3$, получим

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \alpha_{i3}\alpha_{j3} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq i, \\ 1 \text{ при } j = i, \end{cases} \tag{7.6}$$

т. е. сумма квадратов элементов любой строки матрицы равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов любых двух различных строк матрицы равна нулю *). Умножая скалярно (7.4′) на $\mathbf{e}_k$, находим **)

$$(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k) = \alpha_{ik}. \tag{7.7}$$

Найдем аналогичные выражения для элементов матрицы, обратной матрице (7.5). Разлагая векторы старого базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ по новому, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \beta_{11}\mathbf{e}'_1 + \beta_{12}\mathbf{e}'_2 + \beta_{13}\mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}_2 &= \beta_{21}\mathbf{e}'_1 + \beta_{22}\mathbf{e}'_2 + \beta_{23}\mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}_3 &= \beta_{31}\mathbf{e}'_1 + \beta_{32}\mathbf{e}'_2 + \beta_{33}\mathbf{e}'_3, \end{aligned} \tag{7.8}$$

или, короче,

$$\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{3} \beta_{kj}\mathbf{e}'_j. \tag{7.8′}$$

Матрица

$$\|\beta_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{Vmatrix} \tag{7.9}$$

является, очевидно, обратной матрице (7.5). Умножая (7.8′) скалярно

---

*) Матрица $\|\alpha_{ij}\|$, для которой выполнены соотношения (7.6), называется *ортогональной*. Таким образом, матрица перехода от одного ортогонального нормированного базиса к другому является ортогональной.

**) Очевидно, $\alpha_{ik} = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k) = \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k)$.

на $\mathbf{e}'_i$, получим

$$(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k) = \beta_{ki}. \tag{7.10}$$

Сравнивая (7.10) и (7.7), найдем следующую связь между элементами матриц (7.5) и (7.9):

$$\alpha_{ik} = \beta_{ki}. \tag{7.11}$$

Таким образом, матрица (7.9), обратная матрице (7.5), получается *транспонированием* матрицы (7.5).

2. Определение аффинного ортогонального тензора. При построении формальной теории тензоров инвариантные скалярные величины и векторы оказывается целесообразным включить в число тензоров. Так, скалярная величина L, инвариантная относительно переходов от одного ортогонального нормированного базиса к другому, называется *аффинным ортогональным тензором нулевого ранга.*

Температура, масса, длина вектора являются аффинными ортогональными тензорами нулевого ранга. Проекция вектора на первую координатную ось (т. е. на ось, определяемую первым базисным вектором $\mathbf{e}_1$) в каждом базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ является скалярной величиной, не инвариантной относительно переходов от одного базиса к другому, и поэтому не является тензором нулевого ранга.

Включение векторов в число тензоров обеспечивает

Определение 1. *Пусть величина* L *определяется в каждом ортогональном нормированном базисе тройкой чисел: в базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *числами* L_1, L_2, L_3, *в базисе* $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ — *числами* L'_1, L'_2, L'_3 *и т. д. Если при переходе от любого базиса* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *к любому другому базису* $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ *эти числа преобразуются по формулам*

$$L'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} L_k, \tag{7.12}$$

где $\|\alpha_{ik}\|$ — *матрица перехода от базиса* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *к базису* $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, *то величину* L *называют аффинным ортогональным тензором первого ранга и обозначают символом* (L_i), *т. е.* $\mathrm{L} \equiv (L_i)$.

Числа L_i, $i = 1, 2, 3$, называют координатами тензора L в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, а числа L'_i, $i = 1, 2, 3$, соответственно координатами этого тензора в базисе $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$.

Докажем, что любой вектор является аффинным ортогональным тензором первого ранга. Во-первых, в каждом ортогональном нормированном базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ вектор x определяется тройкой чисел — тройкой своих координат. Во-вторых, при переходе от одного базиса к другому координаты вектора $\mathbf{x}$ преобразуются по формулам вида (7.12). Действительно, разложив $\mathbf{x}$ по базисам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, получим

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3. \tag{7.13}$$

Умножим равенство (7.13) скалярно на $\mathbf{e}'_i$. В силу (7.3) и (7.7), это дает

$$x'_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}x_k, \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{7.14}$$

причем формулы (7.14) имеют тот же вид, что и формулы (7.12), а это и означает, что вектор $\mathbf{x}$ является аффинным ортогональным тензором первого ранга.

Замечание 1. Очевидно, каждый аффинный ортогональный тензор первого ранга можно рассматривать как вектор.

Замечание 2. Так как обратная матрица для матрицы $\|\alpha_{ij}\|$ получается транспонированием $\|\alpha_{ij}\|$, то из равенства (7.14) находим

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji}x'_j, \qquad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{7.14$'$}$$

Сформулируем теперь определение тензора второго ранга.

Определение 2. *Пусть величина* L *определяется в каждом ортогональном нормированном базисе девяткой чисел: в базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *числами* L_{ij}, i, $j = 1, 2, 3$, *в базисе* $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ *числами* L'_{ij}, i, $j = 1, 2, 3$, *и т. д. Если при переходе от любого базиса* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *к любому другому базису* $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ *эти числа преобразуются по формулам*

$$L'_{ij} = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \alpha_{im}\alpha_{jn}L_{mn}, \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ 3, \tag{7.15}$$

где $\|\alpha_{ij}\|$ — *матрица перехода от базиса* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *к базису* $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, *то величину* L *называют аффинным ортогональным тензором второго ранга и обозначают символом* (L_{ij}), *т. е.* $\mathrm{L} \equiv (L_{ij})$.

Числа L_{ij}, i, $j = 1, 2, 3$, называют координатами тензора L в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, а числа L'_{ij}, i, $j = 1, 2, 3$, — его координатами в базисе $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$.

В §§ 2—9 мы остановимся подробно на примерах и свойствах аффинных ортогональных тензоров второго ранга, а сейчас сформулируем определение аффинного ортогонального тензора произвольного ранга $p \geqslant 1$.

Определение 3. *Пусть величина* L *определяется в каждом ортогональном нормированном базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

совокупностью 3^p *чисел* $L_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, $i_s = 1, 2, 3$; $s = 1, 2, \ldots, p$. *Если при переходе к любому другому ортогональному нормированному базису* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ *эти числа преобразуются по закону*

$$L'_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_p = 1}^{3} \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \ldots \alpha_{i_p j_p} L_{j_1 j_2 \ldots j_p}, \qquad (7.16)$$

где $\|\alpha_{ij}\|$ — *матрицы перехода от базиса* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *к базису* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, *то величину* L *называют* *аффинным ортогональным тензором* p*-го ранга и обозначают символом* $(L_{i_1 i_2 \ldots i_p})$, *т. е.* $\mathrm{L} \equiv (L_{i_1 i_2 \ldots i_p})$.

Числа $L_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ называются координатами этого тензора в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, а числа $L'_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ — его координатами в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

Замечание 1. Иногда определение тензора p-го ранга, $p \geqslant 1$, формулируют в следующей эквивалентной форме.

Говорят, что задан аффинный ортогональный тензор ранга $p \geqslant 1$ $(L_{i_1 i_2 \ldots i_p})$, *если в каждом ортогональном нормированном базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *задано* 3^p *чисел* $L_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, $i_s = 1, 2, 3$, $s = 1, \ldots, p$ *и если при переходе к любому другому ортогональному нормированному базису* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ *эти числа преобразуются по закону*

$$L'_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_p = 1}^{3} \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \ldots \alpha_{i_p j_p} L_{i_1 i_2 \ldots i_p}. \qquad (7.17)$$

Иногда мы будем пользоваться этой формой определения тензора при $p = 1$, а также при $p = 2$.

Замечание 2. Определения 1, 2 и 3 сформулированы для трехмерного пространства. Совершенно аналогично они могут быть сформулированы и для N-мерного пространства, где ортогональные нормированные базисы содержат по N единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_N$; $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_N$, а матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_N$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}_N$ имеет порядок N, так как

$$\mathbf{e}' = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \mathbf{e}_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

§ 2. Связь между тензорами второго ранга и линейными операторамн

1. Линейный оператор как тензор второго ранга. Напомним прежде всего, что *линейным оператором* или *линейной вектор-функцией* называется такая функция

$$\mathbf{y} = \mathrm{L}(\mathbf{x}),$$