совокупностью 3^p *чисел* $L_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, $i_s = 1, 2, 3$; $s = 1, 2, \ldots, p$. *Если при переходе к любому другому ортогональному нормированному базису* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ *эти числа преобразуются по закону*

$$L'_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_p = 1}^{3} \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \ldots \alpha_{i_p j_p} L_{j_1 j_2 \ldots j_p}, \tag{7.16}$$

где $\|\alpha_{ij}\|$ — *матрицы перехода от базиса* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *к базису* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, *то величину* L *называют* ***аффинным ортогональным тензором*** p*-го* ***ранга*** *и обозначают символом* $(L_{i_1 i_2 \ldots i_p})$, *т. е.* $\mathrm{L} \equiv (L_{i_1 i_2 \ldots i_p})$.

Числа $L_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ называются координатами этого тензора в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, а числа $L'_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ — его координатами в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

Замечание 1. Иногда определение тензора p-го ранга, $p \geqslant 1$, формулируют в следующей эквивалентной форме.

Говорят, что задан аффинный ортогональный тензор ранга $p \geqslant 1$ $(L_{i_1 i_2 \ldots i_p})$, *если в каждом ортогональном нормированном базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *задано* 3^p *чисел* $L_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, $i_s = 1, 2, 3$, $s = 1, \ldots, p$ *и если при переходе к любому другому ортогональному нормированному базису* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ *эти числа преобразуются по закону*

$$L'_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_p = 1}^{3} \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \ldots \alpha_{i_p j_p} L_{i_1 i_2 \ldots i_p}. \tag{7.17}$$

Иногда мы будем пользоваться этой формой определения тензора при $p = 1$, а также при $p = 2$.

Замечание 2. Определения 1, 2 и 3 сформулированы для трехмерного пространства. Совершенно аналогично они могут быть сформулированы и для N-мерного пространства, где ортогональные нормированные базисы содержат по N единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_N$; $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_N$, а матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_N$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}_N$ имеет порядок N, так как

$$\mathbf{e}' = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \mathbf{e}_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

§ 2. Связь между тензорами второго ранга и линейными операторамн

1. Линейный оператор как тензор второго ранга. Напомним прежде всего, что *линейным оператором* или *линейной вектор-функцией* называется такая функция

$$\mathbf{y} = \mathrm{L}(\mathbf{x}),$$

которая каждому вектору $\mathbf{x}$ ставит в соответствие вектор $\mathbf{y}$ и для которой выполняется равенство

$$\mathrm{L}(C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2) = C_1\mathrm{L}(\mathbf{x}_1) + C_2\mathrm{L}(\mathbf{x}_2) \tag{7.18}$$

при любых $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ и любых константах C_1 и C_2.

Координатами линейного оператора L в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ называются коэффициенты L_{ij} разложения образов $\mathrm{L}(\mathbf{e}_1)$, $\mathrm{L}(\mathbf{e}_2)$, $\mathrm{L}(\mathbf{e}_3)$ базисных векторов по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\mathbf{e}_1) &= L_{11}\mathbf{e}_1 + L_{21}\mathbf{e}_2 + L_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathrm{L}(\mathbf{e}_2) &= L_{12}\mathbf{e}_1 + L_{22}\mathbf{e}_2 + L_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathrm{L}(\mathbf{e}_3) &= L_{13}\mathbf{e}_1 + L_{23}\mathbf{e}_2 + L_{33}\mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{7.19}$$

или, короче, разложения

$$\mathrm{L}(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{3} L_{kj}\mathbf{e}_k, \qquad j = 1,\ 2,\ 3. \tag{7.20}$$

Умножим скалярно обе части равенства (7.20) на $\mathbf{e}_i$. В силу соотношений (7.3), это дает

$$L_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathrm{L}(\mathbf{e}_j)), \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ 3. \tag{7.21}$$

Аналогично для координат оператора L в базисе $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ получаем

$$L'_{ij} = (\mathbf{e}'_i, \mathrm{L}(\mathbf{e}'_j)), \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ 3. \tag{7.22}$$

Подставляя в (7.22) выражения

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{m=1}^{3} \alpha_{im}\mathbf{e}_m, \qquad \mathbf{e}'_j = \sum_{n=1}^{3} \alpha_{jn}\mathbf{e}_n, \tag{7.23}$$

найдем

$$L'_{ij} = (\mathbf{e}'_i, \mathrm{L}(\mathbf{e}'_j)) = \left(\left(\sum_{m=1}^{3} \alpha_{im}\mathbf{e}_m \right), \left(\sum_{n=1}^{3} \alpha_{jn}\mathrm{L}(\mathbf{e}_n) \right) \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \alpha_{im}\alpha_{jn}(\mathbf{e}_m, \mathrm{L}(\mathbf{e}_n)) = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \alpha_{im}\alpha_{jn}L_{mn}, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3. \tag{7.24}$$

Формулы (7.24) совпадают с формулами (7.15), а следовательно, доказано, что *линейный оператор* L *является аффинным ортогональным тензором второго ранга.*

2. Тензор второго ранга как линейный оператор. Аффинный ортогональный тензор (L_{ij}) второго ранга можно рассматривать как линейный оператор над векторами евклидова пространства. Пусть задан аффинный ортогональный тензор второго ранга (L_{ij}). Определим соответствующий линейный оператор $\mathbf{y} = \mathrm{L}(\mathbf{x})$ сначала на базисных векторах каждого ортогонального нормированного базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

соотношениями (7.19), а затем определим этот оператор для каждого вектора $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{e}_i$ соотношением

$$\mathrm{L}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{3} x_i\mathrm{L}(\mathbf{e}_i). \tag{7.25}$$

Докажем, что определенный таким образом оператор действительно является линейным, т. е. что для него выполняется соотношение (7.18). Пусть $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{3} y_i\mathbf{e}_i$; тогда

$$C_1\mathbf{x}+C_2\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{3}(C_1x_i+C_2y_i)\,\mathbf{e}_i.$$

Следовательно, в силу определения (7.25) (заменяя в (7.25) $\mathbf{x}$ на $C_1\mathbf{x}+C_2\mathbf{y}$), получим соотношение

$$\mathrm{L}(C_1\mathbf{x}+C_2\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{3}(C_1x_i+C_2y_i)\,\mathrm{L}(\mathbf{e}_i)=$$
$$=C_1\sum_{i=1}^{3}x_i\mathrm{L}(\mathbf{e}_i)+C_2\sum_{i=1}^{3}y_i\mathrm{L}(\mathbf{e}_i)=C_1\mathrm{L}(\mathbf{x})+C_2\mathrm{L}(\mathbf{y}),$$

совпадающее с (7.18). Линейность оператора доказана.

Нетрудно доказать, что определение линейного оператора L с помощью тензора (L_{ij}) не зависит от выбора базиса. Иными словами, если вместо координат L_{ij} тензора в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ взять координаты L'_{ij} этого тензора в базисе $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ и определить линейный оператор L′ соотношениями

$$\begin{aligned}\mathrm{L}'(\mathbf{e}'_1)&=L'_{11}\mathbf{e}'_1+L'_{21}\mathbf{e}'_2+L'_{31}\mathbf{e}'_3,\\ \mathrm{L}'(\mathbf{e}'_2)&=L'_{12}\mathbf{e}'_1+L'_{22}\mathbf{e}'_2+L'_{32}\mathbf{e}'_3,\\ \mathrm{L}'(\mathbf{e}'_3)&=L'_{13}\mathbf{e}'_1+L'_{23}\mathbf{e}'_2+L'_{33}\mathbf{e}'_3\end{aligned} \tag{7.19$'$}$$

для базисных векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ и соотношением

$$\mathrm{L}'(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{3}x'_i\mathrm{L}'(\mathbf{e}'_i) \tag{7.25$'$}$$

для каждого вектора $\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{3}x'_i\mathbf{e}'_i$, то

$$\mathrm{L}'(\mathbf{x})=\mathrm{L}(\mathbf{x}) \tag{7.26}$$

для каждого вектора $\mathbf{x}$.

Действительно, воспользовавшись соотношениями

$$L'_{lj}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\alpha_{lk}\alpha_{ji}L_{ki},\quad x_i=\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ji}x'_j,\quad \mathbf{e}_k=\sum_{l=1}^{3}\alpha_{lk}\mathbf{e}'_l,$$

(7.19), (7.25), (7.19′) и (7.25′), получим

$$\mathrm{L}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{3}x_i\mathrm{L}(\mathbf{e}_i)=\sum_{i=1}^{3}x_i\sum_{k=1}^{3}L_{ki}\mathbf{e}_k=\sum_{j=1}^{3}x'_j\sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\alpha_{lk}\alpha_{ji}L_{ki}\right)\mathbf{e}'_l=$$

$$=\sum_{j=1}^{3}x'_j\sum_{l=1}^{3}L'_{lj}\mathbf{e}'_l=\sum_{j=1}^{3}x'_j\mathrm{L}'(\mathbf{e}'_j)=\mathrm{L}'(\mathbf{x}),\qquad (7.27)$$

что и требовалось доказать.

Мы доказали совпадение операторов L' и L и тем самым доказали, что с помощью соотношений (7.19) и (7.25) каждому аффинному ортогональному тензору второго ранга (L_{ij}) однозначно ставится в соответствие линейный оператор L. Этот линейный оператор L можно отождествить с тензором (L_{ij}), которому он соответствует, иными словами, рассматривать аффинный ортогональный тензор второго ранга как линейный оператор. Такая интерпретация аффинного ортогонального тензора второго ранга широко используется в физике; именно таким образом интерпретируются тензор проводимости и тензор инерции, упомянутые в начале этой главы, а также тензор напряжений, с которым мы познакомимся в § 5 *). Но возможна и другая весьма полезная интерпретация тензора второго ранга, на которой мы остановимся в следующем параграфе.

§ 3. Связь между тензорами и инвариантными полилинейными формами

1. Тензоры первого ранга и инвариантные линейные формы. Пусть в каждой системе координат задана система трех чисел a_1, a_2, a_3, причем эти числа при переходе от одной системы координат к другой преобразуются так, что линейная форма $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$, где x_1, x_2, x_3 — координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$, остается инвариантной; тогда величины a_i $(i=1, 2, 3)$ образуют тензор первого ранга. Действительно, пусть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ вектор $\mathbf{x}$ представляется в виде $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$ и коэффициенты линейной формы равны a_1, a_2, a_3, а в базисе $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ тот же вектор $\mathbf{x}$

*) Если вместо соотношений (7.20) и (7.25) для определения линейного оператора, соответствующего тензору (L_{ij}), воспользоваться соотношениями $L^*(\mathbf{e}_j)=\sum_{k=1}^{3}L_{jk}\mathbf{e}_k$, $j=1, 2, 3$, и $L^*(x)=\sum_{i=1}^{3}x_iL^*(\mathbf{e}_i)$, то получится линейный оператор L^*, который называется *сопряженным* с L.