Действительно, воспользовавшись соотношениями

$$L'_{lj}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\alpha_{lk}\alpha_{ji}L_{ki},\quad x_i=\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ji}x'_j,\quad \mathbf{e}_k=\sum_{l=1}^{3}\alpha_{lk}\mathbf{e}'_l,$$

(7.19), (7.25), (7.19′) и (7.25′), получим

$$\mathrm{L}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{3}x_i\mathrm{L}(\mathbf{e}_i)=\sum_{i=1}^{3}x_i\sum_{k=1}^{3}L_{ki}\mathbf{e}_k=\sum_{j=1}^{3}x'_j\sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\alpha_{lk}\alpha_{ji}L_{ki}\right)\mathbf{e}'_l=$$

$$=\sum_{j=1}^{3}x'_j\sum_{l=1}^{3}L'_{lj}\mathbf{e}'_l=\sum_{j=1}^{3}x'_j\mathrm{L}'(\mathbf{e}'_j)=\mathrm{L}'(\mathbf{x}),\qquad(7.27)$$

что и требовалось доказать.

Мы доказали совпадение операторов L' и L и тем самым доказали, что с помощью соотношений (7.19) и (7.25) каждому аффинному ортогональному тензору второго ранга (L_{ij}) однозначно ставится в соответствие линейный оператор L. Этот линейный оператор L можно отождествить с тензором (L_{ij}), которому он соответствует, иными словами, рассматривать аффинный ортогональный тензор второго ранга как линейный оператор. Такая интерпретация аффинного ортогонального тензора второго ранга широко используется в физике; именно таким образом интерпретируются тензор проводимости и тензор инерции, упомянутые в начале этой главы, а также тензор напряжений, с которым мы познакомимся в § 5 *). Но возможна и другая весьма полезная интерпретация тензора второго ранга, на которой мы остановимся в следующем параграфе.

§ 3. Связь между тензорами и инвариантными полилинейными формами

1. Тензоры первого ранга и инвариантные линейные формы. Пусть в каждой системе координат задана система трех чисел a_1, a_2, a_3, причем эти числа при переходе от одной системы координат к другой преобразуются так, что линейная форма $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$, где x_1, x_2, x_3 — координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$, остается инвариантной; тогда величины a_i $(i=1, 2, 3)$ образуют тензор первого ранга. Действительно, пусть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ вектор $\mathbf{x}$ представляется в виде $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$ и коэффициенты линейной формы равны a_1, a_2, a_3, а в базисе $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ тот же вектор $\mathbf{x}$

---

*) Если вместо соотношений (7.20) и (7.25) для определения линейного оператора, соответствующего тензору (L_{ij}), воспользоваться соотношениями $L^*(\mathbf{e}_j)=\sum_{k=1}^{3}L_{jk}\mathbf{e}_k$, $j=1, 2, 3$, и $L^*(x)=\sum_{i=1}^{3}x_iL^*(\mathbf{e}_i)$, то получится линейный оператор L^*, который называется *сопряженным* с L.

представляется в виде $\mathbf{x}=x_1'\mathbf{e}_1'+x_2'\mathbf{e}_2'+x_3'\mathbf{e}_3'$ и коэффициенты линейной формы равны a_1', a_2', a_3' и пусть линейная форма инвариантна, т. е. для любого вектора $\mathbf{x}$ выполняется равенство

$$a_1'x_1'+a_2'x_2'+a_3'x_3'=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3. \tag{7.28}$$

Подставив в правую часть равенства (7.28) выражение x_k через x_l': $x_k=\sum_{l=1}^{3}\alpha_{lk}x_l'$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{3}a_i'x_i'=\sum_{k=1}^{3}a_k\sum_{l=1}^{3}\alpha_{lk}x_l'=\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}a_k\right)x_i'.$$

В силу произвольности x_1', x_2', x_3', получим

$$a_i'=\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}a_k, \tag{7.29}$$

что и требовалось доказать.

2. Тензоры второго ранга и инвариантные билиеейиые формы. Совершенно аналогично коэффициенты инвариантной билинейной формы

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_iy_j \tag{7.30}$$

(где x_i и y_l — соответственно координаты текущих векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$) составляют тензор второго ранга. Действительно, пусть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ билинейная форма имеет вид (7.30), а в базисе $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ — вид

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}'x_i'y_j' \tag{7.31}$$

и пусть

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}'x_i'y_j'=\sum_{m,n=1}^{3}a_{mn}x_my_n \tag{7.32}$$

для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Подставив в правую часть равенства (7.32) выражение старых координат векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ через новые

$$x_m=\sum_{i=1}^{3}\alpha_{im}x_i',\quad y_n=\sum_{j=1}^{3}\alpha_{jn}y_j', \tag{7.33}$$

получим

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}'x_i'y_j'=\sum_{m,n=1}^{3}a_{mn}\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_{im}x_i'\right)\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_{jn}y_j'\right)=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{3}\left(\sum_{m,n=1}^{3}\alpha_{im}\alpha_{jn}a_{mn}\right)x_i'y_j'. \tag{7.34}$$

В силу произвольности x'_i и y'_j,

$$a'_{ij} = \sum_{m,\,n=1}^{3} \alpha_{im}\alpha_{jn}a_{mn}, \tag{7.35}$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Равенство (7.35) можно доказать, используя лишь векторы единичной длины. Действительно, полагая, например,

$$x'_i = \begin{cases} 1 \text{ при } i = i_0, \\ 0 \text{ при } i \neq i_0, \end{cases} \quad i = 1,\ 2,\ 3, \quad y'_j = \begin{cases} 1 \text{ при } j = j_0, \\ 0 \text{ при } j \neq j_0, \end{cases} \quad j = 1,\ 2,\ 3, \tag{7.36}$$

получим из равенства (7.34) равенство

$$a'_{i_0j_0} = \sum_{m,\,n=1}^{3} \alpha_{i_0m}\alpha_{j_0n}a_{mn}, \tag{7.35'}$$

причем векторы

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x'_i\mathbf{e}'_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{3} y'_j\mathbf{e}'_j$$

имеют, в силу соотношений (7.36), единичную длину, так как базис $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_3$ ортогонален и нормирован (мы условились рассматривать только такие базисы). Следовательно, если билинейная форма инвариантна на единичной сфере, т. е. при условии, что ее значения рассматриваются лишь на векторах единичной длины, то совокупность ее коэффициентов a_{ij} образует аффинный ортогональный тензор второго ранга.

Билинейная форма называется *симметричной*, если матрица ее коэффициентов симметрична, т. е. $a_{ji} = a_{ij}$. (В силу (7.35), это равенство имеет место в любом базисе, если оно выполняется хоть в одном базисе.) Полагая в симметричной билинейной форме $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, мы получим по определению *квадратичную форму*

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j. \tag{7.37}$$

Симметричная билинейная форма однозначно определяется порождаемой ею квадратичной формой. Действительно, подставим в (7.37) вместо координат вектора $\mathbf{x}$ координаты вектора $\mathbf{x}+\mathbf{y}$. Поскольку

$a_{ij}=a_{ji}$, мы получим

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}(x_i+y_i)(x_j+y_j)=\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j+\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}y_iy_j+$$
$$+\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j+\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}y_ix_j=$$
$$=\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j+\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}y_iy_j+2\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j. \qquad (7.38)$$

Следовательно,

$$\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_iy_j=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}(x_i+y_i)(x_j+y_j)-\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j-\sum_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}y_iy_j\right\}, \qquad (7.39)$$

что и требовалось доказать. Отсюда следует, что *коэффициенты инвариантной квадратичной формы составляют аффинный ортогональный тензор второго ранга*, так как они являются коэффициентами соответствующей симметричной инвариантной билинейной формы, а ранее было доказано, что коэффициенты инвариантной билинейной формы образуют аффинный ортогональный тензор второго ранга.

Замечание 2. На основании замечания 1 мы можем сказать теперь, что система коэффициентов a_{ij} квадратичной формы $\sum\limits_{i,\,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$, инвариантной на единичной сфере, образует аффинный ортогональный тензор второго ранга.

3. Тензоры произвольного ранга p и инвариантные полилинейные формы. Пусть векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ разложены по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\xi_j=\xi_{j1}\mathbf{e}_1+\xi_{j2}\mathbf{e}_2+\xi_{j3}\mathbf{e}_3, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ p,$$

и пусть в этом базисе задана система коэффициентов $a_{i_1i_2\ldots i_p}$, где $i_s=1,\ 2,\ 3,\ s=1,\ \ldots,\ p$. Тогда функция

$$\sum_{i_1i_2\ldots i_p=1}^{3} a_{i_1i_2\ldots i_p}\xi_{1i_1}\xi_{2i_2}\ldots\xi_{pi_p}$$

называется *полилинейной формой*. Как и в случае инвариантной билинейной формы, нетрудно доказать, что совокупность коэффициентов инвариантной полилинейной формы произвольного ранга $p\geqslant 1$ образует аффинный ортогональный тензор p-го ранга.