§ 4. Тензор деформаций

Рассмотрим некоторое деформируемое тело, любую точку которого в системе координат $Ox_1x_2x_3$ будем характеризовать ее радиусом-вектором $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$; если радиус-вектор точки M равен $\mathbf{r}$, т. е. $\overline{OM} = \mathbf{r}$, то будем писать $M(\mathbf{r})$.

Пусть тело подверглось деформации, причем точка $M(\mathbf{r})$ сместилась на вектор $\mathbf{u}$, т. е. заняла положение $M'(\mathbf{r}+\mathbf{u})$ (рис. 7.1). Эта деформация описывается полем смещений $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$. Рассмотрим точку $M_1(\mathbf{r}+d\mathbf{r})$, близкую к $M(\mathbf{r})$; при деформации она перейдет в точку $M_1'(\mathbf{r}+d\mathbf{r},\ \mathbf{u}+d\mathbf{u})$. Деформацию тела в окрестности данной точки $M(\mathbf{r})$ можно характеризовать изменением длин всевозможных отрезков $\overline{MM_1}$, $\overline{MM_2}$, ..., выходящих из точки $M(\mathbf{r})$ в достаточно малой ее окрестности.

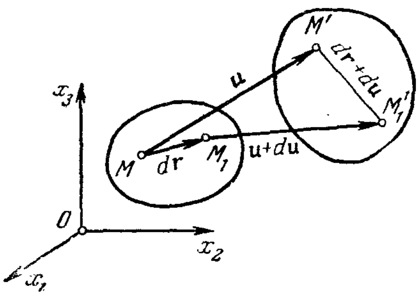

Рис. 7.1.

Рассмотрим изменение длины отрезка $\overline{MM_1}$ при деформации тела. Длина отрезка $\overline{MM_1}$ равна $|d\mathbf{r}|$. Он перейдет в отрезок $\overline{M'M_1'}$, длина которого равна $|d\mathbf{r}+d\mathbf{u}|$. За меру изменения длины отрезка $\overline{MM_1}$ примем

$$\frac{1}{2}\left\{\overline{M'M_1'}^2 - \overline{MM_1^2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{(d\mathbf{r}+d\mathbf{u})^2 - d\mathbf{r}\right\} = \frac{1}{2}\left\{2\,d\mathbf{u}\,d\mathbf{r} + d\mathbf{u}^2\right\} =$$

$$= \gamma_{x_1x_1}dx_1^2 + \gamma_{x_2x_2}dx_2^2 + \gamma_{x_3x_3}dx_3^2 + 2\gamma_{x_1x_2}dx_1\,dx_2 + 2\gamma_{x_1x_3}dx_1\,dx_3 + 2\gamma_{x_2x_3}dx_2\,dx_3.$$

Мы получили квадратичную форму относительно переменных dx_1, dx_2, dx_3, которая по самому своему определению является инвариантной. Следовательно, ее коэффициенты образуют тензор второго ранга. Матрицей этого тензора будет

$$\left\|\begin{matrix} \gamma_{x_1x_1} & \gamma_{x_1x_2} & \gamma_{x_1x_3} \\ \gamma_{x_2x_1} & \gamma_{x_2x_2} & \gamma_{x_2x_3} \\ \gamma_{x_3x_1} & \gamma_{x_3x_2} & \gamma_{x_3x_3} \end{matrix}\right\|. \qquad (7.40)$$

Этот тензор называется *тензором деформаций*.

Если деформация столь мала, что квадратами и произведениями величин u_1, u_2, u_3 и их производных по x_1, x_2, x_3 можно пренебречь по сравнению с их первыми степенями, то матрица этого тензора представится в виде

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{matrix}\right\|. \qquad (7.41)$$

§ 5. Тензор напряжений

1. Определение тензора напряжений. Пусть упругое тело деформировано. Проведем мысленно через точку M этого тела элементарную плоскую площадку σ и восставим к какой-нибудь из двух сторон этой площадки нормальный единичный вектор $\mathbf{n}$ (рис. 7.2). Если равнодействующую $\mathbf{F}_{n\sigma}$ всех упругих сил, приложенных к выбранной стороне площадки, разделить на площадь σ этой площадки, то по определению получится среднее напряжение $(\mathbf{p}_n)_{\text{ср}} = \frac{\mathbf{F}_{n\sigma}}{\sigma}$ на площадке σ, проходящей через точку M с нормалью $\mathbf{n}$. Переходя к пределу при стягивании σ к M, получим истинное напряжение в точке M на элементарной площадке с нормалью $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\sigma \to M} \frac{\mathbf{F}_{n\sigma}}{\sigma}. \qquad (7.42)$$

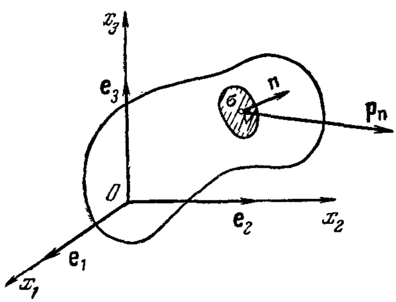

Рис. 7.2.

Меняя направление нормали $\mathbf{n}$, т. е. поворачивая площадку σ, проходящую через точку M, мы получим различные значения вектора $\mathbf{p}_n$ в одной и той же точке M. Таким образом, напряженное состояние упругого тела в данной его точке M не может быть описано одним вектором. Но оказывается, что достаточно знать напряжение на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку M, и тогда может быть вычислено напряжение в точке M на площадке любой ориентации, проходящей через M.

Докажем это. Обозначим через $\mathbf{p}_{x_1}$, $\mathbf{p}_{x_2}$ и $\mathbf{p}_{x_3}$ напряжения в точке M на элементарных площадках, нормали к которым совпадают по направлению с осями координат Ox_1, Ox_2, Ox_3. Иными словами, $\mathbf{p}_{x_i}$ означает напряжение на площадке с единичной нормалью $\mathbf{e}_i$,