по сравнению с их первыми степенями, то матрица этого тензора представится в виде

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{Vmatrix}. \qquad (7.41)$$

§ 5. Тензор напряжений

1. Определение тензора напряжений. Пусть упругое тело деформировано. Проведем мысленно через точку M этого тела элементарную плоскую площадку σ и восставим к какой-нибудь из двух сторон этой площадки нормальный единичный вектор $\mathbf{n}$ (рис. 7.2). Если равнодействующую $\mathbf{F}_{n\sigma}$ всех упругих сил, приложенных к выбранной стороне площадки, разделить на площадь σ этой площадки, то по определению получится среднее напряжение $(\mathbf{p}_n)_{\text{ср}} = \dfrac{\mathbf{F}_{n\sigma}}{\sigma}$ на площадке σ, проходящей через точку M с нормалью $\mathbf{n}$. Переходя к пределу при стягивании σ к M, получим истинное напряжение в точке M на элементарной площадке с нормалью $\mathbf{n}$:

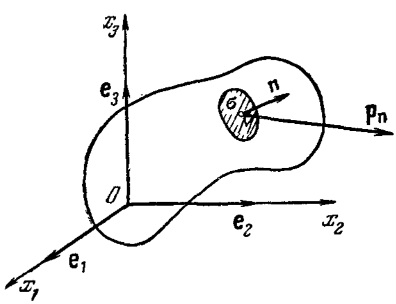

Рис. 7.2.

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\sigma \to M} \frac{\mathbf{F}_{n\sigma}}{\sigma}. \qquad (7.42)$$

Меняя направление нормали $\mathbf{n}$, т. е. поворачивая площадку σ, проходящую через точку M, мы получим различные значения вектора $\mathbf{p}_n$ в одной и той же точке M. Таким образом, напряженное состояние упругого тела в данной его точке M не может быть описано одним вектором. Но оказывается, что достаточно знать напряжение на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку M, и тогда может быть вычислено напряжение в точке M на площадке любой ориентации, проходящей через M.

Докажем это. Обозначим через $\mathbf{p}_{x_1}$, $\mathbf{p}_{x_2}$ и $\mathbf{p}_{x_3}$ напряжения в точке M на элементарных площадках, нормали к которым совпадают по направлению с осями координат Ox_1, Ox_2, Ox_3. Иными словами, $\mathbf{p}_{x_i}$ означает напряжение на площадке с единичной нормалью $\mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i$ — единичный вектор вдоль оси Ox_i (рис. 7.3). Рассмотрим тетраэдр с вершиной в точке M и ребрами MA, MB, MC, параллельными осями Ox_1, Ox_2, Ox_3. Внешняя нормаль $\mathbf{n}_2$ к грани MAC направлена противоположно вектору $\mathbf{e}_2$. Значит, напряжение на этой площадке будет равно $-\mathbf{p}_{x_2}$. Аналогично напряжение на грани BMC, соответствующей внешней нормали $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{e}_1$, будет равно $-\mathbf{p}_{x_1}$, а напряжение на площадке MAB, соответствующей внешней нормали $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{e}_3$, будет равно $-\mathbf{p}_{x_3}$. Обозначим через $\mathbf{p}_n$ напряжение на площадке ABC, соответствующей внешней нормали $\mathbf{n}$, и составим уравнение, выражающее второй закон Ньютона для тетраэдра $MABC$:

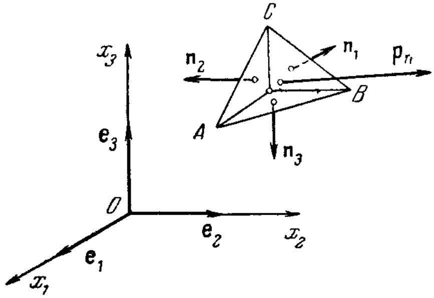

Рис. 7.3.

$$\rho \frac{1}{3} \sigma h \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sigma \mathbf{p}_n - \sigma \cos(\mathbf{n}, x_1)\, \mathbf{p}_{x_1} - \sigma \cos(\mathbf{n}, x_2)\, \mathbf{p}_{x_2} - \\ - \sigma \cos(\mathbf{n}, x_3)\, \mathbf{p}_{x_3} + \frac{1}{3} \sigma h \rho \mathbf{f}. \qquad (7.43)$$

(Здесь σ — площадь грани ABC, h — высота тетраэдра, если за основание принята грань ABC, ρ — объемная плотность массы, $\mathbf{f}$ — объемная сила, приходящаяся на единицу массы (например, сила тяжести).) Тогда $\frac{1}{3}\sigma h$ — объем тетраэдра $MABC$, $\sigma\cos(\mathbf{n}, x_1)$, $\sigma\cos(\mathbf{n}, x_2)$, $\sigma\cos(\mathbf{n}, x_3)$ — площади граней MBC, MAC, MAB. Если разделить равенство (7.43) на σ, а затем перейти к пределу при $h \to 0$ при условии, что ускорение $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ и объемная сила $\mathbf{f}$ остаются ограниченными, то получится равенство

$$0 = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{x_1} \cos(\mathbf{n}, x_1) - \mathbf{p}_{x_2} \cos(\mathbf{n}, x_2) - \mathbf{p}_{x_3} \cos(\mathbf{n}, x_3).$$

Следовательно,

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{x_1} \cos(\mathbf{n}, x_1) + \mathbf{p}_{x_2} \cos(\mathbf{n}, x_2) + \mathbf{p}_{x_3} \cos(\mathbf{n}, x_3). \qquad (7.44)$$

Так определяется напряжение $\mathbf{p}_n$ на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ через напряжения на площадках, нормали к которым совпадают по направлению с осями координат.

Разложим векторы $\mathbf{p}_{x_1}$, $\mathbf{p}_{x_2}$, $\mathbf{p}_{x_3}$ по базисным векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{x_1} &= p_{11}\mathbf{e}_1 + p_{12}\mathbf{e}_2 + p_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{p}_{x_2} &= p_{21}\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2 + p_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{p}_{x_3} &= p_{31}\mathbf{e}_1 + p_{32}\mathbf{e}_2 + p_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{7.45}$$

Если матрица

$$\| p_{ij} \| = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix} \tag{7.46}$$

для данной точки M известна, то в точке M можно определить напряжение на любой площадке σ, проходящей через точку M, как только будет задано направление нормали $\mathbf{n}$ к этой площадке; это обеспечивается соотношениями (7.44) и (7.45). Таким образом, напряженное состояние тела в точке характеризуется матрицей (7.46).

Рассмотрим проекцию вектора напряжения $\mathbf{p}_n$ на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ на направление этой нормали. По самому своему смыслу эта величина не зависит от выбора системы координат. Умножая обе части равенства (7.44) скалярно на $\mathbf{n}$ и используя (7.45), получим, что эта величина выражается квадратичной формой

$$(\mathbf{p}_n, \mathbf{n}) = \sum_{i, j=1}^{n} p_{ij} \cos(\mathbf{n}, x_i) \cos(\mathbf{n}, x_j), \tag{7.47}$$

определенной на единичной сфере.

Таким образом, квадратичная форма (7.47) инвариантна на единичной сфере. Следовательно, совокупность ее коэффициентов p_{ij} образует аффинный ортогональный тензор второго ранга $\Pi = (p_{ij})$ (см. замечание 2 § 3).

Этот тензор называется *тензором напряжений*.

2. Тензор напряжений как линейный оператор. Тензор напряжений удобно рассматривать как линейный оператор, преобразующий единичную нормаль $\mathbf{n}$ к площадке в вектор напряжения $\mathbf{p}_n$ на этой площадке.

Подставим в левую часть равенства (7.44) разложение вектора напряжения по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{p}_n = p_{n_1}\mathbf{e}_1 + p_{n_2}\mathbf{e}_2 + p_{n_3}\mathbf{e}_3,$$

а в правую часть — разложения $\mathbf{p}_{x_1}$, $\mathbf{p}_{x_2}$, $\mathbf{p}_{x_3}$ по этому же базису (см. соотношения (7.45)). Получим, в силу единственности разложения

$\mathbf{p}_n$ по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, систему трех скалярных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p_{n1} &= p_{11}\cos(\mathbf{n}, x_1) + p_{21}\cos(\mathbf{n}, x_2) + p_{31}\cos(\mathbf{n}, x_3), \\ p_{n2} &= p_{12}\cos(\mathbf{n}, x_1) + p_{22}\cos(\mathbf{n}, x_2) + p_{32}\cos(\mathbf{n}, x_3), \\ p_{n3} &= p_{13}\cos(\mathbf{n}, x_1) + p_{23}\cos(\mathbf{n}, x_2) + p_{33}\cos(\mathbf{n}, x_3), \end{aligned}\right\} \tag{7.48}$$

выражающих упомянутый линейный оператор в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Если единичный вектор нормали к площадке

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1\cos(\mathbf{n}, x_1) + \mathbf{e}_2\cos(\mathbf{n}, x_2) + \mathbf{e}_3\cos(\mathbf{n}, x_3)$$

представить в виде горизонтальной матрицы-строки

$$\mathbf{n} = \|\cos(\mathbf{n}, x_1),\ \cos(\mathbf{n}, x_2),\ \cos(\mathbf{n}, x_3)\|,$$

то можно написать (см. Дополнение к гл. 7)

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\,\|p_{ij}\|, \tag{7.49}$$

где $\|p_{ij}\|$ — матрица тензора $\Pi = (p_{ij})$, представляющая тензор напряжений в данной точке. Вместо того чтобы говорить об умножении матрицы $\|p_{ij}\|$ тензора $\Pi = (p_{ij})$ на вектор, говорят об умножении тензора (p_{ij}) на вектор *). Таким образом, чтобы получить в данной точке M напряжение на площадке с единичной нормалью $\mathbf{n}$, нужно умножить тензор напряжений $\Pi = (p_{ij})$ в данной точке на единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ слева:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}(p_{ij}) = \mathbf{n}\Pi. \tag{7.49'}$$

§ 6. Алгебраические операции над тензорами

1. Сложение, вычитание и умножение тензоров. Тензоры одинакового ранга можно суммировать и вычитать; например, суммой (разностью) тензоров второго ранга a_{ij} и b_{ij} называется тензор, координаты которого равны

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}), \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Нетрудно убедиться, что величины c_{ij} при изменении системы координат преобразуются по тензорному закону. Аналогично определяется сумма двух тензоров любого (одинакового) ранга. Перемножать можно тензоры любых рангов. Например, произведением тензора второго ранга a_{ij} на тензор третьего ранга b_{mnp} называется тензор пятого ранга, координаты которого равны

$$c_{ijmnp} = a_{ij}b_{mnp}; \qquad i, j, m, n, p = 1, 2, 3.$$

Нетрудно доказать, что величины c_{ijmnp} при переходе от одной

*) Или, точнее, об операторном умножении тензора на вектор.