$\mathbf{p}_n$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, систему трех скалярных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p_{n1} &= p_{11}\cos(\mathbf{n}, x_1) + p_{21}\cos(\mathbf{n}, x_2) + p_{31}\cos(\mathbf{n}, x_3), \\ p_{n2} &= p_{12}\cos(\mathbf{n}, x_1) + p_{22}\cos(\mathbf{n}, x_2) + p_{32}\cos(\mathbf{n}, x_3), \\ p_{n3} &= p_{13}\cos(\mathbf{n}, x_1) + p_{23}\cos(\mathbf{n}, x_2) + p_{33}\cos(\mathbf{n}, x_3), \end{aligned}\right\} \tag{7.48}$$

выражающих упомянутый линейный оператор в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Если единичный вектор нормали к площадке

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1\cos(\mathbf{n}, x_1) + \mathbf{e}_2\cos(\mathbf{n}, x_2) + \mathbf{e}_3\cos(\mathbf{n}, x_3)$$

представить в виде горизонтальной матрицы-строки

$$\mathbf{n} = \|\cos(\mathbf{n}, x_1), \cos(\mathbf{n}, x_2), \cos(\mathbf{n}, x_3)\|,$$

то можно написать (см. Дополнение к гл. 7)

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\,\|p_{ij}\|, \tag{7.49}$$

где $\|p_{ij}\|$ — матрица тензора $\Pi = (p_{ij})$, представляющая тензор напряжений в данной точке. Вместо того чтобы говорить об умножении матрицы $\|p_{ij}\|$ тензора $\Pi = (p_{ij})$ на вектор, говорят об умножении тензора (p_{ij}) на вектор *). Таким образом, чтобы получить в данной точке M напряжение на площадке с единичной нормалью $\mathbf{n}$, нужно умножить тензор напряжений $\Pi = (p_{ij})$ в данной точке на единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ слева:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}(p_{ij}) = \mathbf{n}\Pi. \tag{7.49'}$$

§ 6. Алгебраические операции над тензорами

1. Сложение, вычитание и умножение тензоров. Тензоры одинакового ранга можно суммировать и вычитать; например, суммой (разностью) тензоров второго ранга a_{ij} и b_{ij} называется тензор, координаты которого равны

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}), \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Нетрудно убедиться, что величины c_{ij} при изменении системы координат преобразуются по тензорному закону. Аналогично определяется сумма двух тензоров любого (одинакового) ранга. Перемножать можно тензоры любых рангов. Например, произведением тензора второго ранга a_{ij} на тензор третьего ранга b_{mnp} называется тензор пятого ранга, координаты которого равны

$$c_{ijmnp} = a_{ij}b_{mnp}; \qquad i, j, m, n, p = 1, 2, 3.$$

Нетрудно доказать, что величины c_{ijmnp} при переходе от одной

---

*) Или, точнее, об операторном умножении тензора на вектор.

системы координат к другой преобразуются по тензорному закону. Аналогично определяется произведение двух тензоров любых рангов.

Умножение тензора на число можно рассматривать как частный случай произведения двух тензоров; оно определяется так: произведением тензора a_{ijk} на число C называется тензор с координатами $b_{ijk} = Ca_{ijk}$. Нетрудно проверить, что величины b_{ijk} составляют тензор.

2. Умножение тензора на вектор. Остановимся теперь на так называемом операторном умножении тензора второго ранга на вектор. Мы уже встречались с частным случаем такого умножения тензора второго ранга на вектор при рассмотрении тензора напряжений (см. соотношение (7.49) предыдущего параграфа). Различают операторное умножение тензора (L_{ij}) на вектор $\mathbf{x}$ слева, $\mathbf{x}(L_{ij})$, и справа, $(L_{ij})\mathbf{x}$. В обоих случаях под произведением тензора на вектор понимают некоторый вектор. Пусть матрица тензора (L_{ij}) в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ равна

$$\|L_{ij}\| = \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Vmatrix} \tag{7.50}$$

и пусть в этом базисе $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i$. Тогда координаты вектора-произведения

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{x}(L_{ij}) \tag{7.51}$$

определяются в этом базисе уравнением (см. Дополнение к гл. 7)

$$\|y_1^*, y_2^*, y_3^*\| = \|x_1, x_2, x_3\| \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Vmatrix}, \tag{7.52}$$

а координаты вектора-произведения

$$\mathbf{y} = (L_{ij})\mathbf{x} \tag{7.53}$$

определяются в этом же базисе уравнением

$$\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}. \tag{7.54}$$

Соотношения (7.52) и (7.54) можно записать соответственно в более компактной форме

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{x}\|L_{ij}\| \tag{7.52$'$}$$

и

$$\mathbf{y} = \|L_{ij}\|\mathbf{x}, \tag{7.54$'$}$$

интерпретируя в первом случае векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}^*$ как матрицы-строки, а во втором случае — векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ как матрицы-столбцы *).

3. Свертка. Следующей операцией, специфической для тензоров, является *операция свертывания* или *свертки* по какой-либо паре индексов. Так, например, сверткой тензора четвертого ранга c_{ijmn} называется тензор второго ранга, координаты которого определяются равенствами

$$a_{mn} = \sum_{i=1}^{3} c_{iimn}.$$

Нетрудно доказать, что величины a_{mn} образуют тензор второго ранга. Если тензор четного ранга подвергнуть операции свертки максимально возможное число раз, то получится число, т. е. инвариант.

Так, например, если произведение двух тензоров первого ранга $a_i b_j$ подвергнуть свертке, то получится скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i.$$

4. Перестановка индексов. Рассмотрим перестановку индексов для весьма важного случая — аффинного ортогонального тензора второго ранга (L_{ij}). Положим в каждом базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

$$L^*_{ij} = L_{ji},$$

где L_{ij} — координаты тензора (L_{ij}) в этом базисе. Совокупость величин L^*_{ij}, как нетрудно доказать, также образует аффинный ортогональный тензор второго ранга. Этот тензор называется *сопряженным с тензором* (L_{ij}) и обозначается символом (L^*_{ij}). Аналогично в тензоре любого ранга можно делать перестановку любых двух индексов, при этом снова получится тензор того же ранга.

5. Разложение тензора второго ранга на симметричный и антисимметричный. Тензор второго ранга (L_{ij}) называется *симметричным*, если его матрица

$$\|L_{ij}\| = \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Vmatrix}$$

в каждом базисе симметрична, т. е. если в каждом базисе выполнены соотношения $L_{ij} = L_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Тензор второго ранга (L_{ij}) называется *антисимметричным*, если для элементов его матрицы $\|L_{ij}\|$ в каждом базисе выполнены

*) Соотношениями (7.51) и (7.53) (или, что то же самое, соотношениями (7.52′) и (7.54′)) определяются два взаимно сопряженных линейных оператора. Ср. со сноской на стр. 271.

соотношения

$$L_{ij} = -L_{ji}.$$

Из этих соотношений следует, что для антисимметричного тензора $L_{ii} = -L_{ii}$, т. е. $2L_{ii} = 0$ и $L_{ii} = 0$. Таким образом, симметричный тензор второго ранга определяется шестью своими координатами, а антисимметричный — только тремя недиагональными координатами.

Простейшим примером антисимметричного тензора второго ранга является векторное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Действительно, пусть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3.$$

Тогда векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ можно записать так:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{e}_3. \tag{7.55}$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются тензорами первого ранга, получим, что система девяти величин $L_{ij} = a_ib_j - a_jb_i$ образует тензор второго ранга. Очевидно, этот тензор антисимметричен. Действительно, $L_{ji} = a_jb_i - a_ib_j = -(a_ib_j - a_jb_i) = -L_{ij}$. Следовательно, этот тензор определяется тремя своими координатами $(a_2b_3 - a_3b_2)$, $(a_3b_1 - a_1b_3)$, $(a_1b_2 - a_2b_1)$, входящими в равенство (7.55).

Нетрудно показать, что если матрица тензора второго ранга (L_{ij}) симметрична (антисимметрична) в каком-либо одном ортогональном нормированном базисе, то она также симметрична (антисимметрична) в любом другом таком базисе.

Заметим теперь, что каждый тензор второго ранга (L_{ij}) может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров, что вытекает из равенства

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\{L_{ij} + L_{ji}\} + \frac{1}{2}\{L_{ij} - L_{ji}\}. \tag{7.56}$$

В следующем параграфе мы рассмотрим важный пример разложения аффинного ортогонального тензора второго ранга на симметричный и антисимметричный тензоры, а именно, тензор относительных смещений разложим на тензор деформаций и тензор относительного поворота.

§ 7. Тензор относительных смещений

Рассмотрим, как и в § 4, деформированное состояние тела. Пусть $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_1u_1(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{e}_2u_2(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{e}_3u_3(x_1, x_2, x_3)$ — вектор смещения точки, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$.