соотношения

$$L_{ij} = -L_{ji}.$$

Из этих соотношений следует, что для антисимметричного тензора $L_{ii} = -L_{ii}$, т. е. $2L_{ii} = 0$ и $L_{ii} = 0$. Таким образом, симметричный тензор второго ранга определяется шестью своими координатами, а антисимметричный — только тремя недиагональными координатами.

Простейшим примером антисимметричного тензора второго ранга является векторное произведение двух векторов **a** и **b**. Действительно, пусть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3.$$

Тогда векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ можно записать так:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{e}_3. \qquad (7.55)$$

Учитывая, что векторы **a** и **b** являются тензорами первого ранга, получим, что система девяти величин $L_{ij} = a_ib_j - a_jb_i$ образует тензор второго ранга. Очевидно, этот тензор антисимметричен. Действительно, $L_{ji} = a_jb_i - a_ib_j = -(a_ib_j - a_jb_i) = -L_{ij}$. Следовательно, этот тензор определяется тремя своими координатами $(a_2b_3 - a_3b_2)$, $(a_3b_1 - a_1b_3)$, $(a_1b_2 - a_2b_1)$, входящими в равенство (7.55).

Нетрудно показать, что если матрица тензора второго ранга (L_{ij}) симметрична (антисимметрична) в каком-либо одном ортогональном нормированном базисе, то она также симметрична (антисимметрична) в любом другом таком базисе.

Заметим теперь, что каждый тензор второго ранга (L_{ij}) может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров, что вытекает из равенства

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\{L_{ij} + L_{ji}\} + \frac{1}{2}\{L_{ij} - L_{ji}\}. \qquad (7.56)$$

В следующем параграфе мы рассмотрим важный пример разложения аффинного ортогонального тензора второго ранга на симметричный и антисимметричный тензоры, а именно, тензор относительных смещений разложим на тензор деформаций и тензор относительного поворота.

§ 7. Тензор относительных смещений

Рассмотрим, как и в § 4, деформированное состояние тела. Пусть $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_1u_1(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{e}_2u_2(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{e}_3u_3(x_1, x_2, x_3)$ — вектор смещения точки, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$.

Предполагая функции u_1, u_2, u_3 дифференцируемыми, получим

$$
\begin{aligned}
du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3, \\
du_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3, \\
du_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3.
\end{aligned} \tag{7.57}
$$

Переходя от координат x_1, x_2, x_3 к координатам x'_1, x'_2, x'_3, $x'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k$, нетрудно проверить, что величины $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$, образуют аффинный ортогональный тензор второго ранга. Этот тензор называется *тензором относительных смещений*. Обозначая его через $\left(\frac{d\mathbf{U}(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}\right)$, можно переписать систему (7.57) в виде равенства

$$
d\mathbf{U} = \left(\frac{d\mathbf{U}(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}\right) d\mathbf{r}. \tag{7.58}
$$

Разложим теперь тензор $\left(\frac{d\mathbf{U}(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}\right)$ на симметричный и антисимметричный тензоры. На языке матриц это разложение примет вид

$$
\begin{Vmatrix}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\
\frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\
\frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}
\end{Vmatrix} =
$$

$$
= \begin{Vmatrix}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}
\end{Vmatrix} +
$$

$$
+ \begin{Vmatrix}
0 & -\omega_3 & \omega_2 \\
\omega_3 & 0 & -\omega_1 \\
-\omega_2 & \omega_1 & 0
\end{Vmatrix}, \tag{7.59}
$$

где вектор $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$ равен $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{U}$. Первая матрица в правой части равенства (7.59) есть матрица симметричного тензора деформаций Д, а вторая — матрица антисимметричного тензора относительного поворота Ω. Теперь равенство (7.58) можно переписать в виде

$$dU = Д\,d\mathbf{r} + \Omega\,d\mathbf{r}. \tag{7.60}$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что

$$\Omega\,d\mathbf{r} = \left[\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{U},\ d\mathbf{r}\right],$$

а следовательно,

$$d\mathbf{U} = Д\,d\mathbf{r} + \left[\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{U},\ d\mathbf{r}\right]. \tag{7.61}$$

Рассматривая относительные смещения $d\mathbf{U}$ точек в окрестности точки $\mathbf{r}$, получившей в результате деформации смещение $\mathbf{U}(\mathbf{r})$, замечаем, что: 1) если $\operatorname{rot}\mathbf{U} \equiv 0$, то, в силу (7.61), относительные смещения $d\mathbf{U}$ происходят за счет чистой деформации; 2) если же $Д = 0$ (т. е. все элементы матрицы тензора Д равны нулю), то относительные смещения $d\mathbf{U}$ происходят за счет чистого поворота.

§ 8. Поле тензора

1. Поле тензора. Дивергенция тензора. *Если каждой точке M некоторой области G пространства поставлен в соответствие тензор (L_{ij}), то говорят, что в области G задано поле тензора (L_{ij})* *), при этом предполагается, что координаты L_{ij} тензора являются определенными функциями координат точки $M(x_1, x_2, x_3)$.

Характерными примерами тензорных полей являются поле тензора деформаций и поле тензора напряжений в упругом теле, подвергшемся деформации, так как напряженное и деформированное состояния такого тела в различных его точках (x_1, x_2, x_3), вообще говоря, различны.

Пусть координаты L_{ij} тензора (L_{ij}) имеют непрерывные частные производные первого порядка по x_1, x_2, x_3.

Составим с помощью матрицы тензора

$$\|L_{ij}\| = \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Vmatrix} \tag{7.62}$$

векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= L_{11}\mathbf{e}_1 + L_{12}\mathbf{e}_2 + L_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{L}_2 &= L_{21}\mathbf{e}_1 + L_{22}\mathbf{e}_2 + L_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{L}_3 &= L_{31}\mathbf{e}_1 + L_{32}\mathbf{e}_2 + L_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{7.63}$$

---

*) Для определенности мы имеем в виду поле тензора второго ранга.