в виде

$$dU = Д\, d\mathbf{r} + \Omega\, d\mathbf{r}. \tag{7.60}$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что

$$\Omega\, d\mathbf{r} = \left[\frac{1}{2}\operatorname{rot} U,\ d\mathbf{r}\right],$$

а следовательно,

$$dU = Д\, d\mathbf{r} + \left[\frac{1}{2}\operatorname{rot} U,\ d\mathbf{r}\right]. \tag{7.61}$$

Рассматривая относительные смещения dU точек в окрестности точки $\mathbf{r}$, получившей в результате деформации смещение $U(\mathbf{r})$, замечаем, что: 1) если $\operatorname{rot} U \equiv 0$, то, в силу (7.61), относительные смещения dU происходят за счет чистой деформации; 2) если же $Д = 0$ (т. е. все элементы матрицы тензора Д равны нулю), то относительные смещения dU происходят за счет чистого поворота.

§ 8. Поле тензора

1. Поле тензора. Дивергенция тензора. *Если каждой точке M некоторой области G пространства поставлен в соответствие тензор (L_{ij}), то говорят, что в области G задано поле тензора* (L_{ij}) *), при этом предполагается, что координаты L_{ij} тензора являются определенными функциями координат точки $M(x_1, x_2, x_3)$.

Характерными примерами тензорных полей являются поле тензора деформаций и поле тензора напряжений в упругом теле, подвергшемся деформации, так как напряженное и деформированное состояния такого тела в различных его точках (x_1, x_2, x_3), вообще говоря, различны.

Пусть координаты L_{ij} тензора (L_{ij}) имеют непрерывные частные производные первого порядка по x_1, x_2, x_3.

Составим с помощью матрицы тензора

$$\|L_{ij}\| = \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Vmatrix} \tag{7.62}$$

векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= L_{11}\mathbf{e}_1 + L_{12}\mathbf{e}_2 + L_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{L}_2 &= L_{21}\mathbf{e}_1 + L_{22}\mathbf{e}_2 + L_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{L}_3 &= L_{31}\mathbf{e}_1 + L_{32}\mathbf{e}_2 + L_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{7.63}$$

---

*) Для определенности мы имеем в виду поле тензора второго ранга.

Дивергенцией тензора (L_{ij}) *называется вектор*

$$\operatorname{div}(L_{ij})=\frac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \mathbf{L}_3}{\partial x_3}=\left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial L_{31}}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1+$$
$$+\left(\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial L_{32}}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_2+\left(\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial L_{33}}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_3=$$
$$=(\operatorname{div}(L_{ij}))_1\mathbf{e}_1+(\operatorname{div}(L_{ij}))_2\mathbf{e}_2+(\operatorname{div}(L_{ij}))_3\mathbf{e}_3. \tag{7.64}$$

Это определение дивергенции тензора (L_{ij}) является формальным. Нужно проверить, имеет ли оно инвариантный характер, т. е. является ли определенная таким образом дивергенция вектором или, что то же самое, тензором первого ранга. Итак, нужно проверить, что величины

$$(\operatorname{div}(L_{ij}))_i=\frac{\partial L_{1i}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{2i}}{\partial x_2}+\frac{\partial L_{3i}}{\partial x_3},\qquad i=1,\ 2,\ 3, \tag{7.65}$$

образуют тензор первого ранга. Имеем

$$(\operatorname{div}(L_{ij}))_i=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial L_{ki}}{\partial x_k},\qquad i=1,\ 2,\ 3.$$

Перейдем к новой системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$. В новой системе

$$(\operatorname{div}(L_{ij}))_j'=\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial L_{mj}'}{\partial x_m'}=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial L_{mj}'}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial x_m'}. \tag{7.66}$$

Но, как известно, матрица, обратная матрице $\|\alpha_{ij}\|$, получается простым транспонированием $\|\alpha_{ij}\|$, поэтому

$$x_n=\sum_{m=1}^{3}\alpha_{mn}x_m'. \tag{7.67}$$

В силу определения тензора второго ранга имеем

$$L_{mj}'=\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\alpha_{mk}\alpha_{ji}L_{ki}. \tag{7.68}$$

Подставляя выражения (7.67) и (7.68) в (7.66), получим

$$(\operatorname{div}(L_{ij}))_j'=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\alpha_{mn}\alpha_{mk}\alpha_{ji}\frac{\partial L_{ki}}{\partial x_n}=$$
$$=\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ji}\left[\sum_{n=1}^{3}\left(\sum_{m=1}^{3}\alpha_{mn}\alpha_{mk}\right)\frac{\partial L_{ki}}{\partial x_n}\right]=$$
$$=\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ji}\left(\sum_{n=1}^{3}\delta_{nk}\frac{\partial L_{ki}}{\partial x_n}\right)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ji}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial L_{ki}}{\partial x_k}\right)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_{ji}(\operatorname{div}(L_{ij}))_i,$$

поскольку

$$\sum_{m=1}^{3} \alpha_{mn}\alpha_{mk} = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = k, \\ 0 & \text{при} \quad n \neq k, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

2. Формула Остроградского для поля тензора. Пусть координаты L_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, тензора (L_{ij}) имеют непрерывные производные первого порядка в замкнутой ограниченной области $\Omega + \sigma_\Omega$, границей которой является кусочно-гладкая поверхность σ_Ω, удовлетворяющая условиям, при которых устанавливается справедливость обычной формулы Остроградского. Пусть, далее, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности, а произведение $\mathbf{n}(L_{ij})$ образуется так же, как в соотношении (7.49′) образовывалось $\mathbf{n}(p_{ij})$. Тогда имеет место формула

$$\iint\limits_{\sigma_\Omega} \mathbf{n}(L_{ij})\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}(L_{ij})\, d\omega, \tag{7.69}$$

которая читается так:

Поток тензора (L_{ij}) *через замкнутую поверхность* σ_Ω *равен тройному интегралу от дивергенции тензора* L_{ij} *по объему* Ω, *ограниченному этой поверхностью.*

Потоком тензора (L_{ij}) *через поверхность* σ_Ω называется интеграл, стоящий в левой части (7.69).

Формула (7.69) называется *тензорной формулой Остроградского.*

Доказательство формулы (7.69) сводится к применению обычной формулы Остроградского к каждой составляющей вектора $\mathbf{n}(L_{ij})$:

$$\iint\limits_{\sigma_\Omega} \mathbf{n}(L_{ij})\, d\sigma =$$

$$= \mathbf{e}_1 \iint\limits_{\sigma_\Omega} [L_{11}\cos(\mathbf{n}, x_1) + L_{21}\cos(\mathbf{n}, x_2) + L_{31}\cos(\mathbf{n}, x_3)]\, d\sigma +$$

$$+ \mathbf{e}_2 \iint\limits_{\sigma_\Omega} [L_{12}\cos(\mathbf{n}, x_1) + L_{22}\cos(\mathbf{n}, x_2) + L_{32}\cos(\mathbf{n}, x_3)]\, d\sigma +$$

$$+ \mathbf{e}_3 \iint\limits_{\sigma_\Omega} [L_{13}\cos(\mathbf{n}, x_1) + L_{23}\cos(\mathbf{n}, x_2) + L_{33}\cos(\mathbf{n}, x_3)]\, d\sigma =$$

$$= \mathbf{e}_1 \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{div}(L_{ij}))_1\, d\omega + \mathbf{e}_2 \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{div}(L_{ij}))_2\, d\omega +$$

$$+ \mathbf{e}_3 \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{div}(L_{ij}))_3\, d\omega = \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{div}(L_{ij}))\, d\omega.$$

3. Уравнения движения сплошной среды. Применим тензорную формулу Остроградского к выводу уравнения движения сплошной среды. Выделим мысленно элементарную область в движущейся сплошной среде (рис. 7.4) и напишем для нее второй закон Ньютона, рассматривая область Ω, заполненную массой, как материальную точку,

$$\rho\Omega\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\rho\Omega\mathbf{f}+\iint\limits_{\sigma_\Omega}\mathbf{p}_n\,d\sigma. \tag{7.70}$$

(Здесь ρ — объемная плотность массы, Ω — объем области (Ω), $\mathbf{f}$ — объемная сила, приходящаяся на единицу массы, $\mathbf{p}_n$ — напряжение на элементарной площадке $d\sigma$ с единичным нормальным вектором $\mathbf{n}$.)

Поверхностный интеграл в правой части равенства (7.70) равен

$$\iint\limits_{\sigma_\Omega}\mathbf{p}_n\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_\Omega}\mathbf{n}\Pi\,d\sigma=$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\Pi\,d\omega=$$
$$=\mathbf{e}_1\iiint\limits_{\Omega}(\operatorname{div}\Pi)_1\,d\omega+$$
$$+\mathbf{e}_2\iiint\limits_{\Omega}(\operatorname{div}\Pi)_2\,d\omega+$$
$$+\mathbf{e}_3\iiint\limits_{\Omega}(\operatorname{div}\Pi)_3\,d\omega, \tag{7.71}$$

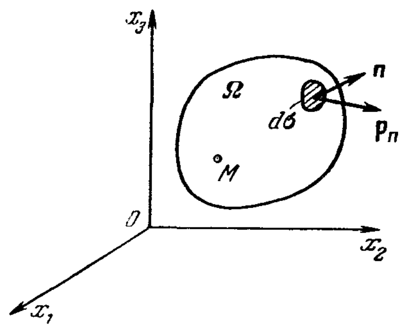

Рис. 7.4.

где Π — тензор напряжений. Применяя к каждому из интегралов в правой части равенства (7.71) теорему о среднем, получим

$$\iint\limits_{\sigma_\Omega}\mathbf{p}_n\,d\sigma=\mathbf{e}_1\Omega(\operatorname{div}\Pi)_1^*+\mathbf{e}_2\Omega(\operatorname{div}\Pi)_2^*+\mathbf{e}_3\Omega(\operatorname{div}\Pi)_3^*. \tag{7.72}$$

Подставляя этот результат в (7.70), деля на Ω и переходя к пределу при $\Omega\to M$ (при стягивании Ω к точке M), получим уравнение движения сплошной среды в векторной форме:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\rho\mathbf{f}+\operatorname{div}\Pi. \tag{7.73}$$

В проекциях на оси координат векторное уравнение (7.73) распадается на три скалярных уравнения:

$$\begin{aligned}\rho\frac{dv_1}{dt}&=\rho f_1+\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{31}}{\partial x_3},\\ \rho\frac{dv_2}{dt}&=\rho f_2+\frac{\partial p_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{32}}{\partial x_3},\\ \rho\frac{dv_3}{dt}&=\rho f_3+\frac{\partial p_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{33}}{\partial x_3}.\end{aligned} \tag{7.74}$$