§ 9. Приведение симметричного тензора второго ранга к главным осям

Будем интерпретировать аффинный ортогональный тензор второго ранга (L_{ij}) как линейный оператор

$$y = \mathrm{L}(\mathbf{x}) \tag{7.75}$$

(см. п. 2 § 2). *Собственными векторами и собственными значениями тензора* (L_{ij}) называют собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\mathrm{L}(\mathbf{x})$. Напомним, что всякий отличный от нулевого вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий равенству

$$\mathrm{L}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}, \tag{7.76}$$

где λ — некоторое число, называется собственным вектором оператора L; при этом число λ называется собственным значением оператора L, отвечающим собственному вектору $\mathbf{x}$.

Переходя к координатам вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, уравнение (7.76) можно заменить системой скалярных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (L_{11}-\lambda)x_1 + L_{12}x_2 + L_{13}x_3 = 0,\\ L_{21}x_1 + (L_{22}-\lambda)x_2 + L_{23}x_3 = 0,\\ L_{31}x_1 + L_{32}x_2 + (L_{33}-\lambda)x_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.77}$$

Чтобы эта линейная однородная система имела нетривиальный вектор — решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} L_{11}-\lambda & L_{12} & L_{13}\\ L_{21} & L_{22}-\lambda & L_{23}\\ L_{31} & L_{32} & L_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{7.78}$$

Если тензор симметричен, т. е. если его матрица в каждом базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ симметрична, то, как известно, все корни λ_1, λ_2 и λ_3 уравнения (7.78) вещественны. Известно, что можно так выбрать нормированные собственные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, отвечающие собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3, чтобы они образовали ортогональный нормированный базис, причем в этом базисе матрица оператора L будет иметь диагональную форму

$$\begin{Vmatrix} L_1 & 0 & 0\\ 0 & L_2 & 0\\ 0 & 0 & L_3 \end{Vmatrix}. \tag{7.79}$$

Выбор базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, в котором матрица тензора имеет диагональную форму, называется *приведением тензора к главным* *осям*. Укажем в качестве примера, что для тензора проводимости в анизотропном теле — «монокристалле» — главными осями являются кристаллографические оси. По поводу главных осей тензора инерции, тензора деформации и тензора напряжений мы отсылаем к курсам механики и механики сплошных сред.

§ 10. Общее определение тензора

Понятие аффинного ортогонального тензора, рассматривавшееся в предыдущих параграфах, связано с преобразованием ортогональных декартовых систем координат и соответствующих им ортогональных нормированных базисов.

В настоящем параграфе, рассматривая всевозможные косоугольные декартовы системы координат и соответственно произвольные базисы, мы дадим общее определение тензора.

1. Взаимные базисы векторов. Пусть векторы

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3 \text{ или, короче, } \mathbf{e}_i \tag{7.80}$$

образуют базис. Обозначим через

$$V=(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3) \tag{7.81}$$

объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах. Векторы $\mathbf{e}^k$

$$\mathbf{e}^1=\frac{[\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3]}{V},\qquad \mathbf{e}^2=\frac{[\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1]}{V},\qquad \mathbf{e}^3=\frac{[\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2]}{V} \tag{7.82}$$

образуют так называемый *«взаимный» базис* для базиса $\mathbf{e}_i$.

Легко проверить, что и, обратно, базис $\mathbf{e}_i$ является взаимным для базиса $\mathbf{e}^k$. Действительно, объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{e}^k$, как на ребрах, равен

$$\begin{aligned} V'&=(\mathbf{e}^1,\ \mathbf{e}^2,\ \mathbf{e}^3)=\left(\frac{[\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3]}{V},\ \frac{[\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1]}{V},\ \frac{[\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2]}{V}\right)=\\ &=\frac{1}{V^3}\left([\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3],\ [[\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1],\ [\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2]]\right)=\\ &=\frac{1}{V^3}\left([\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3]\,\{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)-\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)\}\right)=\frac{V^2}{V^3}=\frac{1}{V}. \end{aligned} \tag{7.83}$$

Таким образом,

$$VV'=1. \tag{7.84}$$

Поэтому

$$\frac{[\mathbf{e}^2,\ \mathbf{e}^3]}{V'}=V\,\frac{[[\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1],\ [\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2]]}{V^2}=\frac{V^2\mathbf{e}_1}{V^2}=\mathbf{e}_1; \tag{7.85}$$