осям. Укажем в качестве примера, что для тензора проводимости в анизотропном теле — «монокристалле» — главными осями являются кристаллографические оси. По поводу главных осей тензора инерции, тензора деформации и тензора напряжений мы отсылаем к курсам механики и механики сплошных сред.

§ 10. Общее определение тензора

Понятие аффинного ортогонального тензора, рассматривавшееся в предыдущих параграфах, связано с преобразованием ортогональных декартовых систем координат и соответствующих им ортогональных нормированных базисов.

В настоящем параграфе, рассматривая всевозможные косоугольные декартовы системы координат и соответственно произвольные базисы, мы дадим общее определение тензора.

1. Взаимные базисы векторов. Пусть векторы

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3 \text{ или, короче, } \mathbf{e}_i \tag{7.80}$$

образуют базис. Обозначим через

$$V = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3) \tag{7.81}$$

объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах. Векторы $\mathbf{e}^k$

$$\mathbf{e}^1 = \frac{[\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3]}{V}, \qquad \mathbf{e}^2 = \frac{[\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1]}{V}, \qquad \mathbf{e}^3 = \frac{[\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2]}{V} \tag{7.82}$$

образуют так называемый *«взаимный» базис* для базиса $\mathbf{e}_i$.

Легко проверить, что и, обратно, базис $\mathbf{e}_i$ является взаимным для базиса $\mathbf{e}^k$. Действительно, объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{e}^k$, как на ребрах, равен

$$\begin{aligned} V' &= (\mathbf{e}^1,\ \mathbf{e}^2,\ \mathbf{e}^3) = \left(\frac{[\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3]}{V},\ \frac{[\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1]}{V},\ \frac{[\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2]}{V}\right) = \\ &= \frac{1}{V^3}\left([\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3],\ [[\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1],\ [\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2]]\right) = \\ &= \frac{1}{V^3}\left([\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3]\,\{\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)\}\right) = \frac{V^2}{V^3} = \frac{1}{V}. \end{aligned} \tag{7.83}$$

Таким образом,

$$VV' = 1. \tag{7.84}$$

Поэтому

$$\frac{[\mathbf{e}^2,\ \mathbf{e}^3]}{V'} = V\,\frac{[[\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1],\ [\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2]]}{V^2} = \frac{V^2\mathbf{e}_1}{V^2} = \mathbf{e}_1; \tag{7.85}$$

аналогично получаем

$$\frac{[\mathbf{e}^3, \mathbf{e}^1]}{V^1} = \mathbf{e}_2, \quad \frac{[\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2]}{V^1} = \mathbf{e}_3. \tag{7.86}$$

Из соотношений (7.85) и (7.86) вытекает, что

$$\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k\right) = \delta_i^k = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \tag{7.87}$$

Следует заметить, что если базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ортонормирован, то взаимный базис с ним совпадает.

2. Ковариантные и контравариантные координаты векторов. Рассмотрим разложение вектора $\mathbf{x}$ по взаимным базисам:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}^i = \sum_{i=1}^{3} x^i \mathbf{e}_i. \tag{7.88}$$

Контравариантными координатами вектора $\mathbf{x}$ в данном базисе называются коэффициенты разложения этого вектора по данному базису; так, числа x^i и x_i являются контравариантными координатами вектора $\mathbf{x}$ в базисах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$, соответственно. *Ковариантными координатами* вектора $\mathbf{x}$ в данном базисе называются скалярные произведения этого вектора на векторы взаимного базиса. Умножая скалярно (7.88) на $\mathbf{e}_k$ или на $\mathbf{e}^k$ и используя (7.87), получим, что ковариантные координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисах $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ и $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ равны, соответственно,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^{3} x_i (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^{3} x_i \delta_k^i = x_k, \tag{7.89}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}^k) = \sum_{i=1}^{3} x^i (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k) = \sum_{i=1}^{3} x^i \delta_i^k = x^k. \tag{7.90}$$

Таким образом, ковариантными координатами вектора в данном базисе являются его контравариантные координаты во взаимном базисе.

3. Операция суммирования в тензорной символике. В тензорном исчислении для записи операции суммирования принято следующее правило: если в некотором выражении встречаются одинаковые индексы, из которых один верхний, а другой нижний, то это означает, что по данному индексу проведено суммирование от 1 до 3. Например, суммы (7.87) и (7.88) в соответствии с этим правилом записываются в виде

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i; \tag{7.91}$$

билинейная форма $\sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik}x^i x^k$ записывается в виде

$$a_{ik}x^i x^k \tag{7.92}$$

и т. п.

4. Преобразование базисных векторов. Рассмотрим преобразование старого базиса $\mathbf{e}_i$ в новый базис $\mathbf{e}_{i'}$. Применяя тензорную запись суммирования, будем иметь

$$\mathbf{e}_{i'} = \alpha^i_{i'}\mathbf{e}_i, \qquad i' = 1,\ 2,\ 3. \tag{7.93}$$

Коэффициенты $\alpha^i_{i'}$ образуют матрицу перехода от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому базису $\mathbf{e}_{i'}$, т. е.

$$\|\alpha^i_{i'}\| = \begin{Vmatrix} \alpha^1_{1'} & \alpha^2_{1'} & \alpha^3_{1'} \\ \alpha^1_{2'} & \alpha^2_{2'} & \alpha^3_{2'} \\ \alpha^1_{3'} & \alpha^2_{3'} & \alpha^3_{3'} \end{Vmatrix}. \tag{7.94}$$

Если мы рассмотрим обратное преобразование нового базиса $\mathbf{e}_{i'}$ в старый базис $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{e}_i = \alpha^{i'}_i \mathbf{e}_{i'}, \tag{7.95}$$

то матрица $\|\alpha^{i'}_i\|$, очевидно, будет обратной для матрицы $\|\alpha^i_{i'}\|$. Действительно, подставляя в равенство

$$\mathbf{e}_k = \alpha^{i'}_k \mathbf{e}_{i'} \tag{7.96}$$

выражение $\mathbf{e}_{i'} = \alpha^i_{i'}\mathbf{e}_i$, получим

$$\mathbf{e}_k = \alpha^{i'}_k \alpha^i_{i'}\mathbf{e}_i. \tag{7.97}$$

В силу единственности разложения вектора $\mathbf{e}_k$ по базисным векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, из (7.97) получаем

$$\alpha^{i'}_k \alpha^i_{i'} = \delta^i_k = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq k, \\ 1 & \text{при} \quad i = k, \end{cases} \tag{7.98}$$

но это и означает, что матрицы $\|\alpha^{i'}_i\|$ и $\|\alpha^i_{i'}\|$ взаимно обратны.

5. Преобразование ковариантных и контравариантных координат вектора. Рассмотрим сначала, как преобразуются контравариантные координаты вектора:

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i = x^{i'}\mathbf{e}_{i'}. \tag{7.99}$$

Подставляя $\mathbf{e}_i = \alpha^{i'}_i\mathbf{e}_{i'}$ в (7.99), получим, что

$$\mathbf{x} = x^i\alpha^{i'}_i\mathbf{e}_{i'} = x^{i'}\mathbf{e}_{i'}.$$

В силу единственности разложения $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$, находим

$$x^{i'} = \alpha^{i'}_i x^i. \tag{7.100}$$

Таким образом, «новые» контравариантные координаты $x^{i'}$ выражаются через «старые» контравариантные координаты x^i с помощью матрицы $\|\alpha_i^{i'}\|$ обратного перехода от нового базиса $\mathbf{e}_{i'}$ к старому базису $\mathbf{e}_i$ *). Отсюда и происходит название «контравариантные координаты» (т. е. противопреобразующиеся).

Аналогично (7.100) получаем, что

$$x^i = \alpha_{i'}^i x^{i'}. \tag{7.101}$$

Рассмотрим теперь, как преобразуются ковариантные координаты x_i вектора $\mathbf{x}$. Так как

$$x_i = (\mathbf{x}, \ \mathbf{e}_i), \qquad x_{i'} = (\mathbf{x}, \ \mathbf{e}_{i'}), \tag{7.102}$$

то

$$x_{i'} = \left(\mathbf{x}, \ \mathbf{e}_{i'}\right) = \left(\mathbf{x}\, \alpha_{i'}^i, \mathbf{e}_i\right) = \alpha_{i'}^i x_i. \tag{7.103}$$

Таким образом, прямое преобразование ковариантных координат выполняется с помощью той же матрицы, что и прямое преобразование базисных векторов ($\mathbf{e}_i$ в $\mathbf{e}_{i'}$); отсюда и название «ковариантные координаты» (т. е. сопреобразующиеся). Аналогично (7.103) получаем

$$x_i = \alpha_i^{i'} x_{i'}. \tag{7.104}$$

6. Общее определение тензора. Будем по-прежнему обозначать через $\|\alpha_{i'}^i\|$ матрицу перехода от старого базиса $\mathbf{e}_i$ к новому $\mathbf{e}_{i'}$, а через $\|\alpha_i^{i'}\|$ — матрицу обратного перехода от нового базиса $\mathbf{e}_{i'}$ к старому $\mathbf{e}_i$.

Определение 1. *Величина* A, *определяемая в каждом базисе* $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, \ 2, \ 3)$ 3^{p+q} *числами* $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$, *где индексы* i_s, $s = 1, 2, \dots, p$, *и* j_t, $t = 1, 2, \dots, q$, *независимо друг от друга пробегают значения* 1, 2, 3, *называется тензором* $(p+q)$*-го ранга, p раз ковариантным и q раз контравариантным, если при переходе от любого базиса* $\mathbf{e}_i$ *к любому другому базису* $\mathbf{e}_{i'}$ *эти числа преобразуются по закону*

$$A_{i_1' i_2' \dots i_p'}^{j_1' j_2' \dots j_q'} = \alpha_{i_1'}^{i_1} \alpha_{i_2'}^{i_2} \dots \alpha_{i_p'}^{i_p} \alpha_{j_1}^{j_1'} \alpha_{j_2}^{j_2'} \dots \alpha_{j_q}^{j_q'} A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}, \tag{7.105}$$

где $\|\alpha_{i'}^i\|$ — *матрица перехода от базиса* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *к базису* $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$, *а матрица* $\|\alpha_i^{i'}\|$ — *обратная ей.*

Числа $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ называются координатами тензора A в базисе $\mathbf{e}_i$. Верхние индексы $j_1, \dots, j_q$ называются контравариантными индексами тензора, а нижние $i_1, \dots, i_p$ — ковариантными.

*) Точнее, с помощью матрицы, получающейся транспонированием этой обратной матрицы.

Иногда пользуются следующей эквивалентной формой определения тензора.

Пусть в каждом базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *задана система* 3^{p+q} *чисел* $A_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}$, *где индексы* i_s, $s=1, 2, \ldots, p$, *и* j_t, $t=1, 2, \ldots, q$, *независимо друг от друга пробегают значения* 1, 2, 3. *Если при переходе к любому другому базису* $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$ *эти числа преобразуются по закону*

$$A_{i_1' i_2' \ldots i_p'}^{j_1' j_2' \ldots j_q'} = \alpha_{i_1'}^{i_1} \alpha_{i_2'}^{i_2} \ldots \alpha_{i_p'}^{i_p} \alpha_{j_1}^{j_1'} \alpha_{j_2}^{j_2'} \ldots \alpha_{j_q}^{j_q'} A_{i_1 i_2 \ldots i_p}^{j_1 j_2 \ldots j_q}, \tag{7.105}$$

где $\|\alpha_{i'}^{i}\|$ — *матрица перехода от базиса* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *к базису* $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$, *а матрица* $\|\alpha_{i}^{i'}\|$ — *обратная ей, то говорят, что задан тензор* $(p+q)$*-го ранга, р раз ковариантный и q раз контравариантный.*

Примеры. 1. а) Система коэффициентов $a_{i_1 i_2}$ инвариантной билинейной формы

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{i_1 i_2} x^{i_1} y^{i_2} = a_{i_1' i_2'} x^{i_1'} y^{i_2'} \tag{7.106}$$

является ковариантным тензором второго ранга.

Действительно, подставляя в (7.106) выражения

$$x^{i_1} = \alpha_{i_1'}^{i_1} x^{i_1'} \quad \text{и} \quad y^{i_2} = \alpha_{i_2'}^{i_2} y^{i_2'}, \tag{7.107}$$

получим, в силу произвольности векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, что

$$a_{i_1' i_2'} = \alpha_{i_1'}^{i_1} \alpha_{i_2'}^{i_2} a_{i_1 i_2}. \tag{7.108}$$

б) В частности, если $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — скалярное произведение двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, то совокупность коэффициентов $g_{i_1 i_2}$ билинейной формы

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{i_1 i_2} x^{i_1} y^{i_2}$$

называется *метрическим тензором* или, точнее, *ковариантным метрическим тензором*. Если в каждом базисе $\mathbf{e}_i$ элементы обратной матрицы для $\|g_{i_1 i_2}\|$ обозначить через $g^{i_1 i_2}$, то они образуют так называемый *контравариантный метрический тензор*.

В силу симметрии скалярного произведения, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$, тензоры g_{ij} и g^{ij} симметричны, т. е. в каждом базисе

$$g_{ij} = g_{ji}, \qquad g^{ij} = g^{ji}.$$

2. Совокупность координат L_i^j линейного оператора L

$$\mathrm{L}(\mathbf{e}_i) = L_i^j \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3, \tag{7.109}$$

образует тензор второго ранга, один раз ковариантный и один раз контравариантный. Действительно, взяв новый базис $\mathbf{e}_{i'}$, имеем

$$\mathrm{L}(\mathbf{e}_{i'}) = L_{i'}^{j'}\mathbf{e}_{j'}. \tag{7.110}$$

С другой стороны,

$$\mathrm{L}(\mathbf{e}_{i'}) = \mathrm{L}\left(\alpha_{i'}^{i}\mathbf{e}_{i}\right) = \alpha_{i'}^{i}\mathrm{L}(\mathbf{e}_{i}) = \alpha_{i'}^{i}L_{i}^{j}\alpha_{j}^{j'}\mathbf{e}_{j'}. \tag{7.111}$$

Сравнивая (7.110) с (7.111), в силу единственности разложения вектора $\mathrm{L}(\mathbf{e}_{i})$ по базису $\mathbf{e}_{j'}$, получаем

$$L_{i'}^{j'} = \alpha_{i'}^{i}\alpha_{j}^{j'}L_{i}^{j}. \tag{7.112}$$

3. Совокупность ковариантных координат x_i вектора $\mathbf{x}$ образует ковариантный тензор первого ранга; совокупность контравариантных координат вектора $\mathbf{x}$ образует контравариантный тензор первого ранга.

7. Операции над тензорами. Операции над тензорами в общем случае определяются так же, как в случае аффинных ортогональных тензоров, с той лишь разницей, что операции сложения и вычитания определяются для тензоров одинакового ранга, имеющих одинаковое, строение, т. е. таких, у которых число p нижних индексов одинаково и число q верхних индексов также одинаково, а свертка делается только по верхнему и нижнему индексам.

Добавляются некоторые новые операции, например операции опускания и поднятия индексов, осуществляемые соответственно путем свертки с ковариантным или контравариантным метрическим тензором.

8. Дальнейшие обобщения. Дальнейшие обобщения связаны с введением криволинейных координат. Возникают понятия параллельного перенесения, ковариантного дифференцирования, объекта связности. По поводу общей теории тензоров мы отсылаем к специальным руководствам [1], [2], [3].

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛ. 7

ОБ УМНОЖЕНИИ МАТРИЦ

Напомним, что произведением $P \cdot Q$ двух прямоугольных матриц (где число столбцов в первом множителе должно равняться числу строк во втором)

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{ns} \end{Vmatrix}$$