образует тензор второго ранга, один раз ковариантный и один раз контравариантный. Действительно, взяв новый базис $\mathbf{e}_{i'}$, имеем

$$\mathrm{L}(\mathbf{e}_{i'}) = L_{i'}^{j'} \mathbf{e}_{j'}. \tag{7.110}$$

С другой стороны,

$$\mathrm{L}(\mathbf{e}_{i'}) = \mathrm{L}\left(\alpha_{i'}^{i} \mathbf{e}_i\right) = \alpha_{i'}^{i} \mathrm{L}(\mathbf{e}_i) = \alpha_{i'}^{i} L_i^j \alpha_j^{j'} \mathbf{e}_{j'}. \tag{7.111}$$

Сравнивая (7.110) с (7.111), в силу единственности разложения вектора $\mathrm{L}(\mathbf{e}_i)$ по базису $\mathbf{e}_{j'}$, получаем

$$L_{i'}^{j'} = \alpha_{i'}^{i} \alpha_j^{j'} L_i^j. \tag{7.112}$$

3. Совокупность ковариантных координат x_i вектора $\mathbf{x}$ образует ковариантный тензор первого ранга; совокупность контравариантных координат вектора $\mathbf{x}$ образует контравариантный тензор первого ранга.

7. Операции над тензорами. Операции над тензорами в общем случае определяются так же, как в случае аффинных ортогональных тензоров, с той лишь разницей, что операции сложения и вычитания определяются для тензоров одинакового ранга, имеющих одинаковое, строение, т. е. таких, у которых число p нижних индексов одинаково и число q верхних индексов также одинаково, а свертка делается только по верхнему и нижнему индексам.

Добавляются некоторые новые операции, например операции опускания и поднятия индексов, осуществляемые соответственно путем свертки с ковариантным или контравариантным метрическим тензором.

8. Дальнейшие обобщения. Дальнейшие обобщения связаны с введением криволинейных координат. Возникают понятия параллельного перенесения, ковариантного дифференцирования, объекта связности. По поводу общей теории тензоров мы отсылаем к специальным руководствам [1], [2], [3].

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛ. 7

ОБ УМНОЖЕНИИ МАТРИЦ

Напомним, что произведением $P \cdot Q$ двух прямоугольных матриц (где число столбцов в первом множителе должно равняться числу строк во втором)

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{ns} \end{Vmatrix}$$

называется матрица

$$R=\begin{Vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{Vmatrix},$$

элемент которой r_{ij}, $i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен скалярному произведению i-й строки первого множителя (матрицы P) на j-й столбец второго множителя (матрицы Q):

$$r_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n} p_{i\nu} q_{\nu j}.$$

Представим векторы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$ как вертикальные матрицы-столбцы

$$\mathbf{y}=\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}.$$

Тогда равенство

$$\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} \tag{1}$$

после умножения матриц в правой его части принимает вид

$$\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{3} L_{1k} x_k \\ \sum\limits_{k=1}^{3} L_{2k} x_k \\ \sum\limits_{k=1}^{3} L_{3k} x_k \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

что равносильно системе трех скалярных равенств

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= L_{11}x_1 + L_{12}x_2 + L_{13}x_3, \\ y_2 &= L_{21}x_1 + L_{22}x_2 + L_{23}x_3, \\ y_3 &= L_{31}x_1 + L_{32}x_2 + L_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Аналогично представим векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}^*$ в виде горизонтальных матриц-строк

$$\mathbf{x}=\| x_1, \ x_2, \ x_3 \|, \quad \mathbf{y}^*=\| y_1^*, \ y_2^*, \ y_3^* \|.$$

Тогда равенство

$$\| y_1^*, \ y_2^*, \ y_3^* \| = \| x_1, \ x_2, \ x_3 \| \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

после умножения матриц в правой части принимает вид

$$\| y_1^*, \ y_2^*, \ y_3^* \| = \left\| \sum_{i=1}^{3} L_{i1} x_i , \ \sum_{i=1}^{3} L_{i2} x_i , \ \sum_{i=1}^{3} L_{i3} x_i \right\|,$$

что равносильно системе трех скалярных равенств:

$$\left. \begin{aligned} y_1^* &= L_{11} x_1 + L_{21} x_2 + L_{31} x_3, \\ y_2^* &= L_{12} x_1 + L_{22} x_2 + L_{32} x_3, \\ y_3^* &= L_{13} x_1 + L_{23} x_2 + L_{33} x_3. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Обычно равенство (1) записывают еще короче в виде

$$\mathbf{y} = \mathrm{L}\mathbf{x}, \tag{6}$$

а равенство (4) соответственно в виде

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{x}\mathrm{L}. \tag{7}$$