ГЛАВА 8

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

В этой главе мы рассмотрим последовательности и ряды, членами которых являются функции. Такие последовательности и ряды называются *функциональными*.

Разложение функций в ряды, члены которых, вообще говоря, проще, чем разлагаемые функции, используется при вычислении и исследовании функций, при интегрировании функций, при решении дифференциальных уравнений и играет важную роль в математике и ее приложениях. При этом существенно используются понятия равномерной сходимости и сходимости в среднем, характерные для функциональных последовательностей и рядов.

§ 1. Понятие равномерной сходимости; признаки равномерной сходимости

1. Сходимость и равномерная сходимость. Рассмотрим последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots, \tag{8.1}$$

определенных на сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ *). Если вместо текущего x подставить какое-нибудь фиксированное значение $x_0 \in [a, b]$, то функциональная последовательность превратится в числовую:

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0),\ \ldots,\ f_n(x_0),\ \ldots \tag{8.2}$$

Функциональная последовательность (8.1) называется *сходящейся в точке* x_0, если числовая последовательность (8.2) сходится; функциональная последовательность (8.1) называется *расходящейся в точке* x_0, если числовая последовательность (8.2) расходится. В первом случае x_0 называют *точкой сходимости последовательности* (8.1),

---

*) Вместо сегмента $a \leqslant x \leqslant b$ можно взять какое-либо другое множество X значений x, например: $a < x < b$ или $a \leqslant x < b$, или $a < x \leqslant b$, или $a < x < +\infty$, или $a \leqslant x < +\infty$, или $-\infty < x < +\infty$ и т. п. В тех случаях, когда такая замена замкнутого отрезка $[a, b]$ произвольным множеством X недопустима, это будет оговариваться особо.

во втором случае — *точкой расходимости* этой *последовательности* *).

Если последовательность функций сходится в каждой точке $x \in [a, b]$, то говорят, что она *сходится на сегменте* $[a, b]$. При этом в каждой точке x сегмента $[a, b]$ существует определенный предел $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$, который будет, вообще говоря, зависеть от x, т. е. будет некоторой функцией $f(x)$, определенной на $[a, b]$. Эту функцию называют *пределом последовательности функций* (8.1) и пишут

$$f_n(x) \to f(x) \text{ при } n \to +\infty,$$

или

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) \text{ на } [a, b]. \tag{8.3}$$

Теперь мы можем сформулировать следующее

Определение 1. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся к функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если при каждом фиксированном значении $x \in [a, b]$ последовательность чисел $f_n(x)$ сходится к числу $f(x)$, т. е. если для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $x \in [a, b]$ найдется такое $N = N(\varepsilon, x)$* **), *зависящее от ε и, вообще говоря, от x, что будет*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ при каждом } n > N(\varepsilon, x). \tag{8.4}$$

Среди всех сходящихся функциональных последовательностей особого внимания заслуживают равномерно сходящиеся последовательности.

Определение 2. *Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равномерно сходящейся к функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$* ***), *зависящее от ε и не зависящее от x, что отклонение $f_n(x)$ от $f(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ при каждом } n > N(\varepsilon) \tag{8.5}$$

сразу для всех $x \in [a, b]$.

*) Множество всех точек сходимости функциональной последовательности (8.1) называют *областью сходимости* этой последовательности. Область сходимости функциональной последовательности может иметь сколь угодно сложную структуру; она может совпадать со всей осью x, как в случае последовательности $f_n(x) \equiv \frac{1}{n}$, $-\infty < x < +\infty$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся на всей оси x к функции $f(x) \equiv 0$, или не содержать ни одной точки, как в случае последовательности $f_n(x) \equiv (-1)^n$, $-\infty < x < +\infty$, $n = 1, 2, \ldots$, расходящейся при каждом значении x, $-\infty < x < +\infty$.

**) $N(\varepsilon, x)$ не предполагается обязательно целым.

***) $N(\varepsilon)$ не предполагается обязательно целым.

Этому определению, очевидно, эквивалентно следующее

Определение 2'. *Последовательность функций* $\{f_n(x)\}$ *называется равномерно сходящейся к функции* $f(x)$ *на сегменте* $[a, b]$, *если*

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to +\infty, \tag{8.5'}$$

т. е. если верхняя грань отклонения функции $f_n(x)$ *от функции* $f(x)$ *на сегменте* $[a, b]$ *стремится к нулю при* $n \to +\infty$.

Действительно, если выполняется (8.5'), то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что при любом $n > N(\varepsilon)$ будет

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Но, в силу определения верхней грани,

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n(x) - f(x)|$$

сразу для всех $x \in [a, b]$. Следовательно, будут выполнены соотношения (8.5).

Обратно, если выполнены соотношения (8.5), то

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

при каждом $n > N(\varepsilon)$, а это означает, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, что выполнено (8.5').

Равномерную сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на $[a, b]$ обозначают символом

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } [a, b]. \tag{8.6}$$

Равномерная сходимость имеет простой геометрический смысл. Соотношение (8.5') означает, что верхняя грань отклонения графика функции $y = f_n(x)$ от графика функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ стремится к нулю при $n \to +\infty$. Иными словами, если окружить график функции $y = f(x)$ «ε-полоской», определяемой соотношениями

$$f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{8.7}$$

то графики всех функций $y = f_n(x)$, начиная с достаточно большого n, целиком лежат в этой «ε-полоске», окружающей график предельной функции $y = f(x)$ (рис. 8.1).

Примеры. 1. Последовательность $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx \to f(x) \equiv 0$ при $n \to +\infty$ на всей оси x, $-\infty < x < +\infty$; эта сходимость является равномерной, так как $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} |\sin nx| \leqslant \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$ сразу при всех x, $-\infty < x < +\infty$, если только $n > N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$.

2. Последовательность $f_n(x)=x^n$ сходится к функции

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } 0\leqslant x<1\\ 1 & \text{при } x=1\end{cases}$$ на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$ при $n\to+\infty$.

Однако эта сходимость будет неравномерной. Действительно, пусть $0<\varepsilon<1$, $0<x<1$. Тогда неравенство $|f_n(x)-f(x)|=x^n<\varepsilon$ выполняется только при $n>N(\varepsilon,x)=\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$. Но $N(\varepsilon,x)=\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\to+\infty$ при $x\to 1-0$ и $0<\varepsilon<1$. Следовательно, при

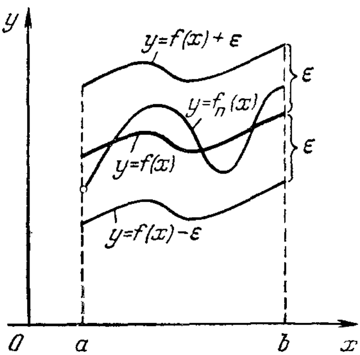

Рис. 8.1.

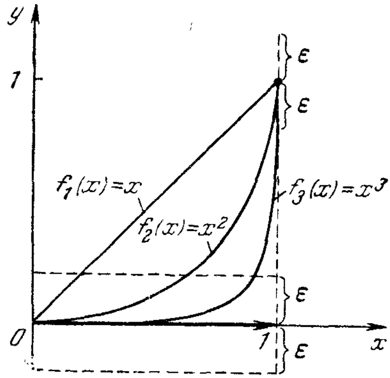

Рис. 8.2.

$0<\varepsilon<1$ не найдется такого конечного $N(\varepsilon)$, не зависящего от x, чтобы неравенство $|f_n(x)-f(x)|=x^n<\varepsilon$ выполнялось при каждом $n>N(\varepsilon)$ сразу для всех x из полусегмента $0\leqslant x<1$. Если сегмент $0\leqslant x\leqslant 1$ заменить меньшим сегментом $0\leqslant x\leqslant 1-\delta$, где $0<\delta<1$, причем δ может быть сколь угодно малым положительным числом, то на этом меньшем сегменте последовательность $f_n(x)=x^n$ сходится к своему пределу $f(x)\equiv 0$ равномерно. Действительно, $N(\varepsilon,x)=\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\leqslant N(\varepsilon)=\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1-\delta)}$ при $0\leqslant x\leqslant 1-\delta$, поэтому $|f_n(x)-f(x)|=x^n<\varepsilon$ при $n>N(\varepsilon)=\frac{\ln\varepsilon}{\ln(1-\delta)}$ сразу для всех $x\in[0,\ 1-\delta]$.

К анализу этого примера можно подойти и с геометрической точки зрения. На рис. 8.2 изображены графики функций последовательности и жирной линией график предельной функции $f(x)$; он состоит из отрезка $0\leqslant x<1$ (без правого конца) оси x и изолированной точки с координатами $(1,1)$. Окружим график предельной функции $f(x)$ «ε-полоской» при $0<\varepsilon<1$. График каждой функции $f_n(x)=x^n$, выйдя из начала координат, обязательно при некотором x, $0<x<1$, покидает эту «ε-полоску», так как его правый конец должен попасть в точку (1, 1). Значит, последовательность $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ неравномерно.

3. Последовательность функций $f_n(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} nx$, $-\infty < x < +\infty$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, сходится к функции

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ +1 & \text{при } 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

однако эта сходимость не является равномерной, что легко устанавливается с помощью геометрического анализа, аналогично тому, как это сделано в предыдущем примере.

4. Последовательность функций $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$ на полупрямой $0 \leqslant x < +\infty$. Чтобы установить, сходится ли эта последовательность равномерно к своему пределу на полупрямой $0 \leqslant x < +\infty$, проверим, выполняется ли соотношение типа (8.5′), т. е. будет ли $\sup\limits_{0 \leqslant x < +\infty} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to +\infty$. Для этого найдем максимум «отклонения» $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ на полупрямой $0 \leqslant x < +\infty$. Мы имеем

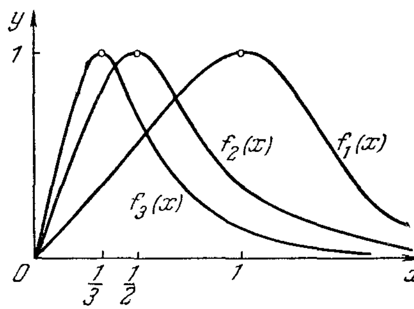

Рис. 8.3.

$$\varphi_n'(x) = \frac{(1+n^2x^2)\,2n - 2nx \cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = 2n\,\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Очевидно, что $\varphi_n'(x) = 0$ при $1 - n^2x^2 = 0$, т. е. при $x_n = \frac{1}{n}$. Следовательно,

$$\max_{0 \leqslant x < +\infty} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n \cdot \frac{1}{n}}{1 + \frac{n^2 \cdot 1}{n^2}} = 1 \not\to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Значит, сходимость не является равномерной. Здесь неравномерная сходимость характеризуется наличием бегущего горбика, высота которого (рис. 8.3), равная единице, является максимумом отклонения графика $f_n(x)$ от графика $f(x)$ при $0 \leqslant x < +\infty$.

Все сказанное до сих пор о функциональных последовательностях легко переносится на функциональные ряды, т. е. на ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots, \tag{8.8}$$

где функции $u_k(x)$ заданы, например, на сегменте $[a, b]$.

Определение 1$_1$. *Функциональный ряд* (8.8) *называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8.9}$$

Предел последовательности частичных сумм

$$S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) \tag{8.10}$$

называют суммой ряда (8.8). *Если ряд* (8.8) *сходится и его сумма равна* $S(x)$, *то пишут*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x). \tag{8.11}$$

Определение 2$_1$. *Функциональный ряд* (8.11) *называется равномерно сходящимся к своей сумме* $S(x)$ *на сегменте* $[a, b]$, *если последовательность его частичных сумм* $\{S_n(x)\}$ *сходится равномерно на* $[a, b]$ *к его сумме* $S(x)$, *т. е. если для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $N = N(\varepsilon)$, *что отклонение* $S_n(x)$ *от* $S(x)$ *будет удовлетворять неравенству*

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon \tag{8.12}$$

для каждого $n > N(\varepsilon)$ *сразу при всех* $x \in [a, b]$, *иными словами, если*

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{8.12'}$$

Примеры равномерно (неравномерно) сходящихся рядов легко построить, отправляясь от примеров равномерно (неравномерно) сходящихся последовательностей. Действительно, по произвольной последовательности функций

$$f_1(x), \; f_2(x), \; \ldots, \; f_n(x), \; \ldots \tag{8.13}$$

легко построить ряд

$$f_1(x)+[f_2(x)-f_1(x)]+[f_3(x)-f_2(x)]+\ldots$$
$$\ldots+[f_n(x)-f_{n-1}(x)]+\ldots, \qquad (8.14)$$

для которого она является последовательностью частичных сумм. Поэтому, если последовательность (8.13) сходится равномерно (неравномерно), то и ряд (8.14) сходится равномерно (неравномерно), в силу определения 2_1.

Заметим, что в силу определения 2_1 справедливо и обратное утверждение: из равномерной (неравномерной) сходимости ряда (8.14) следует равномерная (неравномерная) сходимость последовательности (8.13).

Непосредственно из определения равномерной сходимости вытекает справедливость следующих двух утверждений:

1) *Сумма конечного числа равномерно сходящихся последовательностей (рядов) является равномерно сходящейся последовательностью (рядом).*

2) *Умножение всех членов равномерно сходящейся последовательности (ряда) на одну и ту же ограниченную функцию* $\varphi(x)$ (в частности, константу) *не нарушает равномерной сходимости.*

Докажем, например, второе утверждение. Пусть $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$ и пусть существует такая константа C, $0<C<+\infty$, что $|\varphi(x)|<C$ при всех $x\in[a, b]$. Пусть, наконец, дано какое угодно $\varepsilon>0$. В силу равномерной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$, найдется такое $N(\varepsilon)$, что $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{C}$ сразу при всех $x\in[a, b]$ для каждого $n>N(\varepsilon)$, но тогда

$$|\varphi(x)f_n(x)-\varphi(x)f(x)|=|\varphi(x)|\cdot|f_n(x)-f(x)|<C\cdot\frac{\varepsilon}{C}=\varepsilon$$

для каждого $n>N(\varepsilon)$ сразу при всех $x\in[a, b]$, т. е. $\varphi(x)f_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)f(x)$ на $[a, b]$ при $n\to+\infty$. Считая $f_n(x)$ частичной суммой, а $f(x)$ — суммой равномерно сходящегося функционального ряда, заключаем, что это утверждение справедливо и для равномерно сходящегося ряда.

2. Признаки равномерной сходимости. Если предел $f(x)$ последовательности функций (8.13) известен, то ее исследование на равномерную сходимость часто может быть выполнено непосредственно, на основе определений 2 и 2_1 или их геометрической интерпретации, аналогично тому, как это было сделано в примерах 1—4.

Однако иногда целесообразнее исследование вопроса о равномерной сходимости последовательности функций (8.13) свести к исследованию вопроса о равномерной сходимости соответствующего функционального ряда (8.14), для которого она является последовательностью частичных сумм. Такое сведение может быть полезным потому, что для функциональных рядов существуют различные практически удобные признаки равномерной сходимости.

Наиболее простым и широко используемым из таких признаков является мажорантный признак Вейерштрасса, основанный на сравнении функционального ряда с числовым рядом, члены которого неотрицательны.

Числовой ряд с неотрицательными членами

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots \tag{8.15}$$

называется мажорирующим, или мажорантным, для функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots \tag{8.16}$$

на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, *если*

$$|u_k(x)| \leqslant a_k \tag{8.17}$$

при всех $k = 1, 2, \ldots$ *сразу для всех* $x \in [a, b]$.

Мажорантный признак Вейерштрасса. *Если для функционального ряда* (8.16) *существует сходящийся мажорирующий на* $[a, b]$ *числовой ряд* (8.15), *то ряд* (8.16) *сходится равномерно на* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть дано какое угодно $\varepsilon > 0$. В силу сходимости мажорантного ряда (8.15), при всех достаточно больших значениях n имеет место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k < \varepsilon.$$

Тогда при всех таких n, в силу соотношений (8.17), будут выполняться неравенства

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k < \varepsilon \tag{8.18}$$

сразу для всех $x \in [a, b]$, что и означает равномерную сходимость ряда (8.16). Признак доказан.

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно на всей оси x, $-\infty < x < +\infty$, так как для него существует мажорирующий сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \left(\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2} \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty \right).$$

2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ на полуоси $0\leqslant x<+\infty$. Пользуясь обычными приемами дифференциального исчисления, находим $\max\limits_{0\leqslant x<+\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}=\frac{1}{2n^2}$. Следовательно, $\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^2}$ при $0\leqslant x<+\infty$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ сходится равномерно на всей полуоси $0\leqslant x<+\infty$.

3. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$, $0\leqslant x<+\infty$, не существует мажорирующего сходящегося числового ряда, так как $\max\limits_{0\leqslant x<+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right|=\frac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ расходится. Однако, в силу признака Лейбница (см. вып. 1, гл. 13, § 5, неравенство (13.80)), при любом $x\in[0\leqslant x<+\infty)$ имеет место оценка

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}\right|\leqslant\frac{1}{x+n}\leqslant\frac{1}{n}\quad\text{при}\quad 0\leqslant x<+\infty,$$

а следовательно, в силу определения равномерной сходимости функционального ряда (см. соотношение (8.12)), ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ сходится равномерно на полуоси $0\leqslant x<+\infty$. Этот пример показывает, что признак Вейерштрасса является лишь достаточным для равномерной сходимости и не является необходимым.

Приведем теперь основной критерий равномерной сходимости, имеющий важное теоретическое значение и позволяющий установить более тонкие достаточные признаки равномерной сходимости, чем признак Вейерштрасса.

Критерий Коши (для равномерно сходящихся последовательностей). *Для равномерной сходимости последовательности функций $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon>0$ существовало такое $N=N(\varepsilon)$, что при каждом $n>N(\varepsilon)$ и всех $p>0$ неравенство*

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon \tag{8.19}$$

выполнялось бы сразу для всех $x\in[a, b]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$; тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ и всех $p > 0$ будет

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

сразу для всех $x \in [a, b]$. Поэтому

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при всех $n > N(\varepsilon)$ и всех $p > 0$ сразу для всех $x \in [a, b]$.

Достаточность. Из выполнения неравенства (8.19) при всех $x \in [a, b]$ вытекает, что при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ последовательность чисел $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится, так как она является фундаментальной, т. е. последовательность функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится на всем отрезке $[a, b]$. Обозначим предельную функцию через $f(x)$. Переходя к пределу в (8.19) при $p \to +\infty$, получим, что

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

при всех $n > N(\varepsilon)$ сразу для всех $x \in [a, b]$. Но это и означает, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Критерий доказан.

Применяя критерий Коши для равномерно сходящихся последовательностей к последовательности частичных сумм

$$S_1(x) = u_1(x),$$
$$S_2(x) = u_1(x) + u_2(x), \ \ldots, \ S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x), \ \ldots$$

функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$, получим

Критерий Коши (для равномерно сходящихся рядов). *Для равномерной сходимости ряда*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots \tag{8.20}$$

на отрезке $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое $N = N(\varepsilon)$, что при каждом $n > N(\varepsilon)$ и всех $p > 0$ неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \tag{8.21}$$

выполнялось бы сразу для всех $x \in [a, b]$.

С помощью критерия Коши можно доказать

Признак Абеля. *Если частичные суммы ряда*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots \tag{8.22}$$

равномерно ограничены на $[a, b]$, *т. е. существует такая константа* C, $0 < C < +\infty$, *что*

$$|S_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| < C \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8.23}$$

сразу для всех $x \in [a, b]$, *а последовательность функций*

$$\alpha_1(x), \ \alpha_2(x), \ \ldots, \ \alpha_k(x), \ \ldots, \tag{8.24}$$

монотонно не возрастая, равномерно стремится к нулю на этом отрезке, то ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(x)\, u_k(x) \tag{8.25}$$

сходится равномерно на $[a, b]$.

Прежде чем доказать признак Абеля, приведем пример его применения.

4. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$ можно рассматривать как результат умножения членов ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx + \ldots \tag{8.26}$$

на члены последовательности

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \ldots, \ \frac{1}{k}, \ \ldots \tag{8.27}$$

Для частичных сумм ряда (8.26) имеет место оценка

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

(ср. с вып. 1, гл. 13, § 5), а следовательно, сразу при всех x, удовлетворяющих неравенствам

$$2m\pi + \alpha \leqslant x \leqslant (2m+1)\pi + \alpha, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < \pi,$$
$$m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots, \tag{8.28}$$

выполняются неравенства

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \text{const} < +\infty \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как последовательность (8.27), монотонно убывая, стремится к нулю и, будучи числовой, стремится к своему пределу равномерно на всей оси x, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$ удовлетворяет всем условиям признака Абеля на каждом интервале (8.28) и поэтому сходится равномерно на каждом таком интервале.

Доказательство признака Абеля. Докажем, что при сформулированных выше условиях для ряда (8.25) выполнен критерий Коши (для равномерно сходящихся рядов). Мы имеем

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p}u_{n+p} = \\ = \alpha_{n+1}[S_{n+1} - S_n] + \alpha_{n+2}[S_{n+2} - S_{n+1}] + \ldots \\ \ldots + \alpha_{n+p}[S_{n+p} - S_{n+p-1}] = -\alpha_{n+1}S_n + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})S_{n+1} + \ldots \\ \ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})S_{n+p-1} + \alpha_{n+p}S_{n+p}. \quad (8.29)\end{aligned}$$

Учитывая, что $\alpha_1(x) \geqslant \alpha_2(x) \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n(x) \geqslant \alpha_{n+1}(x) \geqslant \ldots$ и что $|S_n(x)| \leqslant C$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех $x \in [a, b]$, из равенства (8.29) получим, что

$$\begin{aligned}|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| \leqslant C\{\alpha_{n+1} + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + \\ + (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) + \ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p}\} = 2C\alpha_{n+1} \leqslant 2C\varepsilon_{n+1}\end{aligned}$$

при всех $p > 0$ и сразу для всех $x \in [a, b]$, где $\varepsilon_{n+1} = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \alpha_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to +\infty$, что и требовалось доказать.

§ 2. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

1. Непрерывность и равномерная сходимость.

Теорема 8.1. А) *Если последовательность непрерывных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $f(x)$, то $f(x)$ также непрерывна на $[a, b]$.*

Б) *Если все члены ряда*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \quad (8.30)$$

непрерывны на $[a, b]$ и ряд сходится равномерно на $[a, b]$, то его сумма $S(x)$ также непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. А) Возьмем произвольную точку $x \in [a, b]$, и пусть $(x + h) \in [a, b]$. Установим непрерывность $f(x)$ в точке x. Для этого оценим разность $f(x + h) - f(x)$. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что при достаточно малых по