Так как последовательность (8.27), монотонно убывая, стремится к нулю и, будучи числовой, стремится к своему пределу равномерно на всей оси x, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$ удовлетворяет всем условиям признака Абеля на каждом интервале (8.28) и поэтому сходится равномерно на каждом таком интервале.

Доказательство признака Абеля. Докажем, что при сформулированных выше условиях для ряда (8.25) выполнен критерий Коши (для равномерно сходящихся рядов). Мы имеем

$$\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p}u_{n+p} =$$
$$= \alpha_{n+1}[S_{n+1} - S_n] + \alpha_{n+2}[S_{n+2} - S_{n+1}] + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{n+p}[S_{n+p} - S_{n+p-1}] = -\alpha_{n+1}S_n + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})S_{n+1} + \ldots$$
$$\ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})S_{n+p-1} + \alpha_{n+p}S_{n+p}. \qquad (8.29)$$

Учитывая, что $\alpha_1(x) \geqslant \alpha_2(x) \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n(x) \geqslant \alpha_{n+1}(x) \geqslant \ldots$ и что $|S_n(x)| \leqslant C$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех $x \in [a, b]$, из равенства (8.29) получим, что

$$|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| \leqslant C\{\alpha_{n+1} + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) +$$
$$+ (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) + \ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p}\} = 2C\alpha_{n+1} \leqslant 2C\varepsilon_{n+1}$$

при всех $p > 0$ и сразу для всех $x \in [a, b]$, где $\varepsilon_{n+1} = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \alpha_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to +\infty$, что и требовалось доказать.

§ 2. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

1. Непрерывность и равномерная сходимость.

Теорема 8.1. А) *Если последовательность непрерывных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$, $\ldots$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $f(x)$, то $f(x)$ также непрерывна на $[a, b]$.*

Б) *Если все члены ряда*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \qquad (8.30)$$

непрерывны на $[a, b]$ и ряд сходится равномерно на $[a, b]$, то его сумма $S(x)$ также непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. А) Возьмем произвольную точку $x \in [a, b]$, и пусть $(x + h) \in [a, b]$. Установим непрерывность $f(x)$ в точке x. Для этого оценим разность $f(x + h) - f(x)$. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что при достаточно малых по модулю значениях h модуль этой разности будет меньше ε. Имеем

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant |f(x+h)-f_n(x+h)| + \\ + |f_n(x+h)-f_n(x)| + |f_n(x)-f(x)|. \quad (8.31)$$

Взяв n достаточно большим, мы, в силу равномерной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$ на $[a, b]$, будем иметь

$$|f(x+h)-f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при всех} \quad (x+h) \in [a, b], \quad (8.32)$$

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при всех} \quad x \in [a, b]. \quad (8.33)$$

Фиксировав n, выбранное указанным образом, рассмотрим средний член в правой части неравенства (8.31). Так как $f_n(x)$ — функция непрерывная, то найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех h, удовлетворяющих неравенству $|h| < \delta(\varepsilon)$, будет

$$|f_n(x+h)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8.34)$$

Но тогда из (8.31), в силу (8.32), (8.33) и (8.34), получаем, что $|f(x+h)-f(x)| < \varepsilon$ при всех h, удовлетворяющих неравенству $|h| < \delta(\varepsilon)$, а это и означает, что $f(x)$ непрерывна в точке $x \in [a, b]$. Но точка $x \in [a, b]$ была выбрана произвольно, следовательно, $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x \in [a, b]$, т. е. непрерывна на $[a, b]$.

Заметим, что если x является одним из концов сегмента $[a, b]$, то приращению h можно придавать значения лишь какого-нибудь одного знака, что приводит к доказательству непрерывности справа в точке a и непрерывности слева в точке b.

Б) Частичная сумма ряда $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, как сумма конечного числа непрерывных функций, непрерывна при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$ Так как, в силу равномерной сходимости ряда, $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a, b]$, то, по доказанному в А), сумма ряда также непрерывна. Теорема доказана.

Равномерная сходимость является лишь достаточным условием для того, чтобы предел последовательности непрерывных функций был непрерывной функцией. Это подтверждает хотя бы пример 4 из п. 1 § 1, в котором рассматривается последовательность непрерывных функций $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $n = 1, 2, \ldots$, неравномерно сходящаяся на полупрямой $0 \leqslant x < +\infty$ к непрерывной функции $f(x) \equiv 0$.

Однако для некоторого узкого класса последовательностей и рядов справедливы и обратные утверждения, доказанные Дини *).

*) Улисс Дини (1845—1918) — итальянский математик.

Теорема 8.1′ (*теорема Дини*). А) *Если последовательность непрерывных функций, заданных на* $[a, b]$ *), *не убывает, т. е.* $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots$ *на* $[a, b]$, *и сходится к непрерывной функции* $f(x)$, *то эта сходимость является равномерной на* $[a, b]$.

Б) *Если сумма ряда* $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ *с неотрицательными непрерывными на* $[a, b]$ *членами непрерывна на* $[a, b]$, *то этот ряд сходится равномерно на* $[a, b]$.

Доказательство. А) Докажем, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое n, при котором будет

$$0 \leqslant R_n(x) = f(x) - f_n(x) < \varepsilon \quad \text{сразу при всех} \quad x \in [a, b]. \tag{8.35}$$

Тогда, в силу очевидной монотонности последовательности

$$R_1(x) \geqslant R_2(x) \geqslant \ldots \geqslant R_n(x) \geqslant \ldots, \tag{8.36}$$

соотношение (8.35) будет выполняться и при всех больших значениях n, т. е. будет иметь место равномерная сходимость.

Доказательство будем вести от противного. Пусть для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ такого n не существует. Тогда при каждом $n = 1, 2, \ldots$ найдется такое $x_n \in [a, b]$, что будет

$$R_n(x_n) \geqslant \varepsilon_0. \tag{8.37}$$

Из последовательности точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ на отрезке $[a, b]$ выберем по теореме Больцано — Вейерштрасса подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, сходящуюся к некоторому $x_0 \in [a, b]$. Функция $R_n(x) = f(x) - f_n(x)$, как разность двух непрерывных функций, является непрерывной; поэтому при любом m будет

$$\lim_{n_k \to +\infty} R_m(x_{n_k}) = R_m(x_0).$$

Но при любом m и достаточно большом k будет $n_k > m$, и, следовательно, в силу (8.36) и (8.37),

$$R_m(x_{n_k}) \geqslant R_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon_0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n_k \to +\infty$, получим, что $R_m(x_0) \geqslant \varepsilon_0$ при любом m. Но это противоречит соотношению $\lim\limits_{m \to +\infty} R_m(x_0) = 0$, вытекающему из сходимости $f_m(x)$ к $f(x)$ в точке x_0.

---

*) В этой теореме существенно используется замкнутость и ограниченность отрезка $[a, b]$; однако теорема сохраняет силу и при замене отрезка $[a, b]$ произвольным замкнутым ограниченным множеством X.

Б) Частичные суммы ряда $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $n=1, 2, \ldots$, с неотрицательными непрерывными членами образуют неубывающую последовательность непрерывных функций, сходящуюся по условию к непрерывной функции $S(x)$. Следовательно, в силу пункта А) данной теоремы, эта сходимость равномерна, а это и означает, что ряд сходится равномерно.

2. Предельный переход под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда. *Если*

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{x_0}^{x} f_n(\xi)\,d\xi=\int\limits_{x_0}^{x}\left[\lim_{n\to+\infty} f_n(\xi)\right]d\xi \tag{8.38$_1$}$$

или

$$\int\limits_{x_0}^{x}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(\xi)\right\}d\xi=\sum_{k=1}^{+\infty}\int\limits_{x_0}^{x} u_k(\xi)\,d\xi, \tag{8.38$_2$}$$

то говорят, что можно переходить к пределу под знаком интеграла $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(\xi)\,d\xi$ *или соответственно что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ *можно интегрировать почленно в пределах от* x_0 *до* x.

Соотношение (8.38$_2$) является обобщением теоремы об интеграле суммы на случай бесконечного числа слагаемых.

Заменяя функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ рядом, для которого она является последовательностью частичных сумм, или, наоборот, заменяя ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ последовательностью его частичных сумм, мы можем соответственно соотношение (8.38$_1$) преобразовать к виду (8.38$_2$) и соотношение (8.38$_2$) преобразовать к виду (8.38$_1$).

Таким образом, решая вопрос об условиях справедливости одного из них, мы тем самым решаем вопрос об условиях справедливости и другого. Заметим, что для справедливости соотношений (8.38$_1$) и (8.38$_2$) не достаточно существования интегралов и сходимости соответствующих последовательностей и рядов (см. примеры в конце этого пункта). Требуется еще выполнение некоторых дополнительных условий. Такого рода достаточными условиями являются: 1) равномерная сходимость и, как это будет показано в § 6 настоящей главы, 2) сходимость в среднем.

Теорема 8.2. А) *Если последовательность непрерывных функций* $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно на* $[a, b]$ *к функции* $f(x)$, *т. е.*

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x) \quad \text{на} \quad [a, b]. \tag{8.39}$$

то последовательность интегралов $\left\{\int\limits_{x_0}^{x} f_n(z)\,dz\right\}$ *сходится равномерно по* x *на* $[a, b]$ *к интегралу* $\int\limits_{x_0}^{x} f(z)\,dz$

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_n(z)\,dz \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(z)\,dz \tag{8.40}$$

при любом $x_0 \in [a, b]$.

Б) *Если ряд*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x), \tag{8.41}$$

члены которого непрерывны на отрезке $[a, b]$, *сходится равномерно на этом отрезке, то имеет место равенство*

$$\int\limits_{x_0}^{x} S(z)\,dz = \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(z)\,dz, \tag{8.42}$$

т. е. ряд (8.41) *можно интегрировать почленно в пределах от* x_0 *до* x *при любых* x_0 *и* x *из* $[a, b]$, *причем ряд* (8.42) *сходится равномерно по* x *на* $[a, b]$ *при любом* $x_0 \in [a, b]$.

Доказательство. А) Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем такое $N(\varepsilon)$, чтобы, в силу (8.34), выполнялось неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{8.43}$$

при каждом $n > N(\varepsilon)$ сразу при всех $x \in [a, b]$. Так как по теореме 8.1 функция $f(x)$, будучи пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, непрерывна, то интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} f(z)\,dz$ существует при любых x_0 и x из $[a, b]$. Оценим разность $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(z)\,dz - \int\limits_{x_0}^{x} f(z)\,dz$. При каждом $n > N(\varepsilon)$, в силу (8.43), мы имеем

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} f_n(z)\,dz - \int\limits_{x_0}^{x} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} [f_n(z) - f(z)]\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f_n(z) - f(z)|\,dz \leqslant |x - x_0| \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant \varepsilon, \tag{8.44}$$

а это и означает, что имеет место (8.40). Из соотношения (8.40) вытекает равенство

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(z)\,dz=\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz \quad \text{при} \quad x,\ x_0\in[a,\ b]. \tag{8.45}$$

Таким образом, если последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a,\ b]$, то *можно переходить к пределу под знаком интеграла* $\int_{x_0}^{x} f_n(z)\,dz$ при любых x_0 и x из $[a,\ b]$.

Б) При любом $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ частичная сумма $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, как сумма конечного числа непрерывных функций, непрерывна. По условию

$$S_n(x)\rightrightarrows S(x) \quad \text{на} \quad [a,\ b].$$

Но тогда, в силу пункта А),

$$\int_{x_0}^{x} S_n(z)\,dz\rightrightarrows\int_{x_0}^{x} S(z)\,dz \quad \text{на} \quad [a,\ b].$$

Заметим, что

$$\int_{x_0}^{x} S_n(z)\,dz=\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n} u_k(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(z)\,dz. \tag{8.46}$$

Поэтому соотношение (8.45) можно переписать так:

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(z)\,dz\right\}\rightrightarrows\int_{x_0}^{x} S(z)\,dz \quad \text{на} \quad [a,\ b], \tag{8.47}$$

причем выражение, стоящее в фигурной скобке, является частичной суммой ряда (8.42). Следовательно, равенство (8.42) имеет место и ряд (8.42) сходится равномерно на $[a,\ b]$, что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема сохраняет силу и в том случае, когда $f_n(x)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, могут иметь разрывы, но являются интегрируемыми функциями. Тогда при условии равномерной сходимости $f(x)$ также интегрируема и выполняется соотношение (8.40).

Равномерная сходимость является лишь достаточным условием для того, чтобы можно было переходить к пределу под знаком интеграла и интегрировать ряд почленно. Например, последовательность $f_n(x)=x^n$ сходится неравномерно на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ к своему пределу $f(x) \equiv 0$ при $0 \leqslant x < 1$, $f(1) = 1$. Однако

$$\int_{x_0}^{x} f_n(z)\,dz = \int_{x_0}^{x} z^n\,dz = \frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{n+1} \to 0 = \\ = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

и любых x_0 и x из отрезка $[a, b]$. Но если последовательность интегрируемых функций $f_n(x)$ сходится к своему пределу $f(x)$ неравномерно, то может случиться, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(z)\,dz \neq \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$. Например,

$$f_n(x) = 4nx^3e^{-nx^4} \to f(x) \equiv 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

но

$$\int_0^1 4nx^3e^{-nx^4}\,dx = 1 - e^{-n} \not\to \int_0^1 0 \cdot dx = 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

3. Предельный переход под знаком производной и почленное дифференцирование ряда. *Если*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left\{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right\}' \tag{8.48}$$

или

$$\left\{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)\right\}' = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(x), \tag{8.49}$$

то говорят, что можно переходить к пределу под знаком производной или соответственно что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ *можно дифференцировать почленно.*

Соотношения (8.48) и (8.49) эквивалентны в таком же смысле, как и соотношения (8.38_1) и (8.38_2).

Соотношение (8.49) является обобщением правила дифференцирования суммы на случай бесконечного числа слагаемых.

Для справедливости соотношений (8.48) и (8.49) не достаточно существования производных и сходимости соответствующих последовательностей и рядов, требуется еще выполнение некоторых дополнительных условий. Достаточные условия такого рода содержит

Теорема 8.3. А) *Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций**) $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *на* $[a, b]$,

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{на} \quad [a, b], \tag{8.50}$$

*) Функция $f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если она имеет непрерывную производную.

а последовательность их производных $\{f'_n(x)\}$ *сходится равномерно к* $\varphi(x)$ *на* $[a, b]$,

$$f'_1(x),\ f'_2(x),\ \ldots,\ f'_n(x),\ \ldots \rightrightarrows \varphi(x) \quad \text{на} \quad [a, b], \tag{8.51}$$

то $f(x)$ *также дифференцируема на* $[a, b]$ *и*

$$f'(x) = \varphi(x) = \lim_{n \to +\infty} f'_n(x), \tag{8.52}$$

т. е. допустим предельный переход под знаком производной.

Б) *Если ряд с непрерывно дифференцируемыми членами*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \tag{8.53}$$

сходится на $[a, b]$, *а ряд производных*

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(x) \tag{8.54}$$

сходится равномерно на $[a, b]$, *то сумма* $S(x)$ *ряда дифференцируема на этом отрезке и всюду на нем выполняется равенство*

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(x), \tag{8.55}$$

т. е. ряд (8.53) *можно почленно дифференцировать.*

Доказательство. А) Так как по условию доказываемой теоремы производные $f'_n(x)$ являются непрерывными функциями и имеет место равномерная сходимость $f'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a, b]$, то по теореме 8.2

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{x_0}^{x} f'_n(z)\,dz = \int_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz, \tag{8.56}$$

т. е.

$$\lim_{n \to +\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)] = \int_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz. \tag{8.57}$$

Переходя к пределу в левой части равенства (8.57), получим

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz,$$

т. е.

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz. \tag{8.58}$$

Следовательно, $f(x)$ как сумма двух дифференцируемых функций — константы $f(x_0)$ и интеграла $\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz$ — является функцией дифференцируемой. Дифференцируя обе части равенства (8.58) по x, получим

$$f'(x) = \varphi(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x).$$

Б) Полагая $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, имеем $S_n(x) \to S(x)$ на $[a, b]$, $S_n'(x) \rightrightarrows \sigma(x)$ на $[a, b]$, причем $S_n'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k'(x)$ непрерывна на $[a, b]$ при $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно, в силу пункта А), $S(x)$ является функцией, дифференцируемой на этом отрезке, и всюду на этом отрезке выполняется равенство

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(x),$$

что и требовалось доказать.

Если последовательность производных сходится неравномерно, то может случиться, что равенство (8.52) не выполняется. Например,

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \ln\left(nx + \sqrt{n^2x^2+1}\right) \to f(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
$$-\infty < x < +\infty,$$

но

$$\lim_{n \to +\infty} f_n'(0) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2x^2+1}} \Bigg|_{x=0} \right) = 1 \neq f'(0) = 0.$$

4. Почленный предельный переход в функциональных последовательностях и рядах. Теорема о пределе суммы, вообще говоря, неверна в случае бесконечного числа слагаемых. Так, например, и сумма, и каждый член ряда в равенстве

$$x = \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad -l < x < l, \quad l \neq 0,$$

справедливость которого доказывается в п. 5 § 2 гл. 11, стремятся к определенным конечным пределам при $x \to l - 0$. Если же применить к этому равенству теорему о пределе суммы при $x \to l - 0$, то мы получим абсурдное равенство $l = 0$.

Однако при определенных дополнительных ограничениях теорема о пределе суммы распространяется и на случай бесконечного числа слагаемых. Справедлива следующая

Теорема 8.4. А) *Если функциональный ряд*

$$S(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_k(x)+\ldots \tag{8.59}$$

сходится равномерно в некоторой окрестности точки x_0 и если

$$\lim_{x\to x_0} u_k(x)=c_k \quad \text{при} \quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{8.60}$$

то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k$ сходится, причем

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} c_k, \tag{8.61}$$

т. е. в равномерно сходящемся ряде можно переходить к пределу почленно.

Б) *Если последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... равномерно сходится в окрестности точки x_0 и при каждом n существует определенный конечный предел*

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x)=A_n,$$

то последовательность чисел A_1, A_2, ..., A_n, ... также сходится и

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Доказательство. Пусть дано произвольное $\varepsilon>0$. Так как ряд (8.59) сходится равномерно в окрестности x_0, то существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n>N(\varepsilon)$ и всех $p>0$ будет

$$|u_{n+1}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon \tag{8.62}$$

сразу для всех x из этой окрестности x_0. Переходя к пределу при $x\to x_0$ в неравенстве (8.62), получим неравенство

$$|c_{n+1}+\ldots+c_{n+p}|\leqslant\varepsilon, \tag{8.63}$$

справедливое при всех $n>N(\varepsilon)$ и всех $p>0$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k$ сходится. Устремляя в (8.62) и (8.63) индекс p к бесконечности, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\right|\leqslant\varepsilon, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|\leqslant\varepsilon \tag{8.64}$$

при всех $n\geqslant N(\varepsilon)$ и сразу для всех x из окрестности x_0. Фиксируем теперь $n>N(\varepsilon)$ и выберем $\delta=\delta(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon). \tag{8.65}$$

Тогда при $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ будем иметь, в силу (8.64) и (8.65),

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \\ + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \tag{8.66}$$

Доказательство Б) следует из А), если рассмотреть ряд

$$f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)] + \ldots + [f_n(x) - f_{n-1}(x)] + \ldots,$$

для которого последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ является последовательностью частичных сумм и который удовлетворяет всем условиям пункта А).

§ 3. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{8.67}$$

или вида

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1 (x - x_0) + \ldots + c_n (x - x_0)^n + \ldots, \tag{8.68}$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ — *постоянные числа.* Ряд вида (8.68) простой заменой $x' = x - x_0$ сводится к ряду вида (8.67). Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением рядов вида (8.67). Представление функции в виде суммы степенного ряда или, иными словами, разложение функции в степенной ряд применяется как в теоретических исследованиях, так и в приближенных вычислениях. Подробнее мы остановимся на этом в § 5, а сейчас займемся изучением основных свойств степенных рядов.

1. Интервал сходимости степенного ряда; радиус сходимости. Выясним прежде всего, какой может быть область сходимости степенного ряда. В отличие от области сходимости произвольного функционального ряда, которая может оказаться множеством точек сколь угодно сложной структуры, область сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ всегда является отрезком оси x, который может быть