выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon). \tag{8.65}$$

Тогда при $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ будем иметь, в силу (8.64) и (8.65),

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \\ + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \tag{8.66}$$

Доказательство Б) следует из А), если рассмотреть ряд

$$f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)] + \ldots + [f_n(x) - f_{n-1}(x)] + \ldots,$$

для которого последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ является последовательностью частичных сумм и который удовлетворяет всем условиям пункта А).

§ 3. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{8.67}$$

или вида

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1 (x - x_0) + \ldots + c_n (x - x_0)^n + \ldots, \tag{8.68}$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ — *постоянные числа.* Ряд вида (8.68) простой заменой $x' = x - x_0$ сводится к ряду вида (8.67). Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением рядов вида (8.67). Представление функции в виде суммы степенного ряда или, иными словами, разложение функции в степенной ряд применяется как в теоретических исследованиях, так и в приближенных вычислениях. Подробнее мы остановимся на этом в § 5, а сейчас займемся изучением основных свойств степенных рядов.

1. Интервал сходимости степенного ряда; радиус сходимости. Выясним прежде всего, какой может быть область сходимости степенного ряда. В отличие от области сходимости произвольного функционального ряда, которая может оказаться множеством точек сколь угодно сложной структуры, область сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ всегда является отрезком оси x, который может быть сегментом, полусегментом или интервалом, может вырождаться в одну точку $x=0$ или совпадать со всей осью x. Всякий степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится в точке $x=0$, поскольку в этой точке он превращается в числовой ряд

$$c_0+c_1\cdot 0+c_2\cdot 0+\ldots+c_n\cdot 0+\ldots=c_0.$$

Существуют степенные ряды, сходящиеся т о л ь к о в точке $x=0$, например ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n!\,x^n$ *). Действительно, при любом $x\neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n}=\lim_{n\to+\infty}(n+1)|x|=+\infty,$$

следовательно, по признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n!\,x^n$ расходится. Существуют степенные ряды, сходящиеся на всей оси x, например ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$; его сходимость при любом x легко устанавливается также с помощью признака Даламбера. Рассмотрим теперь какой-нибудь степенной ряд, область сходимости которого не совпадает со всей осью x и не вырождается в точку $x=0$, например ряд $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$, представляющий собой геометрическую прогрессию со знаменателем x. Как известно, он сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|\geqslant 1$. Таким образом, областью сходимости этого ряда является конечный интервал $-1<x<1$ с центром в точке $x=0$. Оказывается, что вообще справедлива следующая

Теорема 8.5. *Если область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ не вырождается в точку $x=0$ и не совпадает со всей осью x, то существует такой конечный интервал $(-R,\ R)$, называемый и н т е р в а л о м с х о д и м о с т и степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, в каждой внутренней точке которого этот ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне сегмента $[-R,\ R]$, расходится* **).

*) Напомним, что по определению $0!=1$.

**) При этом, если интервал $(-R,\ R)$ является интервалом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, то, как выяснится из дальнейшего, областью сходимости этого ряда может оказаться либо интервал $(-R,\ R)$, либо сегмент $[-R,\ R]$, либо один из полусегментов $(-R,\ R]$ или $[-R,\ R)$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется

Лемма. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ *сходится при* $x=\alpha\neq 0$, *то он сходится абсолютно при каждом* x, *для которого* $|x|<|\alpha|$.

Доказательство леммы. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k \alpha^k$ следует, что $c_k\alpha^k \to 0$ при $k\to+\infty$; поэтому существует такое $A=\text{const}<+\infty$, что $|c_k\alpha^k|\leqslant A$ при всех $k=0, 1, 2, \ldots$ Пусть $|x|<|\alpha|$. Положим $q=\frac{|x|}{|\alpha|}$; очевидно, что $0\leqslant q<1$. Тогда мы будем иметь $|c_k x^k| = |c_k\alpha^k|\cdot\left|\frac{x}{\alpha}\right|^k \leqslant Aq^k$ при всех $k=0, 1, 2, \ldots$ Но ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} Aq^k$, как геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим единицы, сходится, значит, ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |c_k x^k|$ также сходится по признаку сравнения (см. вып. 1, гл. 13, § 2), т. е. ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ при данном значении x сходится абсолютно. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится при некотором значении $x=\alpha\neq 0$, то он сходится абсолютно на интервале $-|\alpha|<x<|\alpha|$. В частности, если ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится на всей оси x, то он сходится на всей оси x абсолютно.

Доказательство теоремы 8.5. Положим $R=\sup|x'|$, где x' пробегает множество всех точек сходимости ряда. Совершенно очевидно, что $R<+\infty$, так как если бы существовали точки сходимости x' со сколь угодно большим модулем $|x'|$, то, в силу леммы, ряд сходился бы абсолютно на всей оси x, а это противоречит условию теоремы. В силу определения числа R, при $|x|>R$ ряд расходится. Докажем, что при $|x|<R$ он сходится абсолютно. Пусть $|x|<R$. В силу определения точной верхней грани, найдется такая точка сходимости x', что $|x|<|x'|<R$; но тогда по лемме при таком значении x ряд будет сходиться абсолютно. Теорема доказана.

В концах интервала сходимости степенные ряды могут вести себя различным образом. Например, ряды

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, \qquad (а)$$

$$1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\ldots, \qquad (б)$$

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots, \qquad (в)$$

$$1+x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots \qquad (г)$$

имеют интервал сходимости $-1<x<1$. Для рядов (б), (в), (г) это устанавливается с помощью признака Даламбера, а ряд (а) — известная геометрическая прогрессия. Ряд (а) в концах интервала сходимости расходится. Ряды (б) и (в) сходятся в одном из концов интервала (по признаку Лейбница) и расходятся в другом, превращаясь в гармонический ряд. Ряд (г) сходится абсолютно в обоих концах интервала сходимости (в силу интегрального признака).

Таким образом, если область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ отлична от одной-единственной точки $x=0$ и не совпадает со всей осью x, то существует такое число R, $0<R<+\infty$, что областью сходимости данного степенного ряда является какой-либо из отрезков: $(-R, R)$ или $(-R, R]$, или $[-R, R)$, или $[-R, R]$; это число R называют *радиусом сходимости степенного ряда.*

Если степенной ряд сходится только при $x=0$, то полагают, что радиус сходимости $R=0$; если же степенной ряд сходится на всей оси x, то полагают $R=+\infty$. Это позволяет пользоваться понятием радиуса сходимости в случае любого степенного ряда. Степенной ряд, а следовательно, и его радиус сходимости однозначно определяются последовательностью коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ Укажем некоторые способы вычисления радиуса сходимости по коэффициентам ряда.

Теорема 8.6$_1$. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=l, \qquad 0\leqslant l<+\infty,$$

то радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ *равен* $R=\frac{1}{l}$, *при этом полагают* $R=0$ *при* $l=+\infty$ *и* $R=+\infty$ *при* $l=0$.

Доказательство. Применив к ряду признак Даламбера, получим, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|c_{n+1}||x|^{n+1}}{|c_n||x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=|x|\cdot l\ ^*).$$

*) Если члены ряда неположительны, то для применения признака Даламбера нужно брать их абсолютные величины. Аналогично обстоит дело с применением признака Коши.

Если $l=0$, то $|x|\cdot l=0$ и ряд сходится абсолютно при любых значениях x, т. е. $R=+\infty$. Если $l=+\infty$ и $x\neq 0$, то $|x|\cdot l=+\infty$ и ряд расходится при любых $x\neq 0$, т. е. $R=0$. Если $0<l<+\infty$, то при $l|x|<1$ ряд сходится абсолютно, а при $l|x|>1$ ряд расходится; иными словами, при $|x|<\frac{1}{l}$ ряд сходится абсолютно, а при $x>\frac{1}{l}$ он расходится; следовательно, $R=\frac{1}{l}$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается (с применением признака Коши) следующая

Теорема 8.6$_2$. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=l,\qquad 0\leqslant l<+\infty,$$

то радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_kx^k$ *равен* $R=\frac{1}{l}$, *при этом полагают* $R=0$ *при* $l=+\infty$ *и* $R=+\infty$ *при* $l=0$.

Теоремы 8.6_1 и 8.6_2 применимы лишь в тех случаях, когда существуют соответственно пределы $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$.

К любому степенному ряду применима следующая более сильная

Теорема 8.6$_3$ (Коши — Адамара). *Радиус сходимости произвольного степенного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_kx^k$ *равен*

$$R=\frac{1}{l},\qquad \textit{где}\quad l=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|c_n|},\tag{8.69}$$

причем считается, что $R=0$ *при* $l=+\infty$ *и* $R=+\infty$ *при* $l=0$.

Замечание. Символом $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$ обозначен верхний предел последовательности неотрицательных чисел $|c_1|$, $\sqrt{|c_2|}$, $\sqrt[3]{|c_3|}$, ..., $\sqrt[n]{|c_n|}$, ... Если эта последовательность не ограничена, то по определению $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=+\infty$. Если же она ограничена, то $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$ является абсциссой самой правой предельной точки последовательности.

Доказательство теоремы 8.6_3. Возможны лишь следующие три случая: 1) $0<l<+\infty$, 2) $l=0$, 3) $l=+\infty$. Рассмотрим каждый случай отдельно.

1) Пусть $0 < l < +\infty$. Докажем, что $R = \frac{1}{l}$, т. е. что: а) при любом x_1, для которого $|x_1| < \frac{1}{l}$, ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится; б) при любом x_2, для которого $|x_2| > \frac{1}{l}$, этот ряд расходится.

а) Пусть $|x_1| < \frac{1}{l}$, т. е. $l|x_1| < 1$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ будет $(l+\varepsilon)|x_1| = q < 1$. Так как $l = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ является самой правой предельной точкой последовательности $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$, то $\sqrt[n]{|c_n|} < l+\varepsilon$, начиная с достаточно большого n, а следовательно, при всех таких значениях n

$$\sqrt[n]{|c_n|}\,|x_1| < (l+\varepsilon)|x_1| = q < 1, \quad \text{т. е.} \quad |c_n||x_1|^n < q^n.$$

Поэтому, в силу признака сравнения и в силу сходимости прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n||x_1|^n$ сходится, т. е. ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x_1^n$ сходится абсолютно.

б) Пусть $|x_2| > \frac{1}{l}$, т. е. $l|x_2| > 1$. Тогда при достаточно малом ε, $0 < \varepsilon < l$, будет $(l-\varepsilon)|x_2| > 1$. Но так как $l = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ является предельной точкой последовательности $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$, то найдется такая бесконечная последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, что $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > l-\varepsilon$, т. е. $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|}\,|x_2| > (l-\varepsilon)|x_2| > 1$ и $|c_{n_k}||x_2|^{n_k} > 1$. Таким образом, для ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ необходимый признак сходимости не выполнен, а следовательно, этот ряд расходится.

2) Пусть $l = 0$. Докажем, что $R = +\infty$, т. е. что ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится при всех x, $-\infty < x < +\infty$. Пусть $x_0 \neq 0$. Так как $l = 0 = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, то, начиная с достаточно большого n, будет $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|x_0|}$, т. е. при всех таких n будет $\sqrt[n]{|c_n|}\,|x_0| < \frac{1}{2}$ и $|c_n||x_0|^n < \frac{1}{2^n}$. Поэтому, в силу признака сравнения, ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n||x_0|^n$ сходится, а следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x_0^n$ сходится абсолютно.

3) Пусть $l=+\infty$, т. е. последовательность чисел $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ не ограничена. Докажем, что $R=0$, т. е. что при любом $x_0 \neq 0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x_0^n$ расходится. Допустим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x_0^n$, где $x_0 \neq 0$, сходится, тогда $c_n x_0^n \to 0$ при $n \to +\infty$ (в силу необходимого признака сходимости), а следовательно, найдется такое число A, $1 < A < +\infty$, что $|c_n x_0^n| < A$ при всех $n=0, 1, 2, \ldots$; поэтому при всех $n=0, 1, 2, \ldots$ будет $\sqrt[n]{|c_n|}\,|x_0| < \sqrt[n]{A} \leqslant A$, т. е. будет $\sqrt[n]{|c_n|} < \dfrac{A}{|x_0|}$, а это противоречит условию, что последовательность $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ не ограничена. Теорема полностью доказана.

Замечание. Теорема Коши — Адамара позволяет иначе, чем это сделано в п. 3, доказать возможность почленного дифференцирования и почленного интегрирования степенного ряда, так как легко проверить, что формулы (8.69) для проинтегрированного и продифференцированного степенного ряда дают ту же величину радиуса сходимости, что и для исходного степенного ряда.

2. О равномерной сходимости степенного ряда и непрерывности его суммы. Было установлено, что во внутренних точках интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно. Выясним теперь, как обстоит дело с равномерной сходимостью. Справедлива

Теорема 8.7. *Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится равномерно на каждом замкнутом интервале, лежащем строго внутри интервала сходимости.*

Доказательство. Пусть $-R < \alpha \leqslant x \leqslant \beta < R$, где $(-R, R)$ — интервал сходимости. Докажем, что на отрезке $[\alpha, \beta]$ ряд сходится равномерно. Возьмем $x_0 > \max(|\alpha|, |\beta|)$, $x_0 \in (-R, R)$. Тогда для всех $x \in [\alpha, \beta]$ будет выполняться неравенство $|x| < |x_0|$, а следовательно, и неравенство $|c_n x^n| \leqslant |c_n x_0^n|$. Но числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x_0^n$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n x^n|$ сходятся на отрезке $[\alpha, \beta]$ равномерно. Теорема доказана.

Замечание 1. Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)|$ сходится равномерно, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ называется *регулярно сходящимся*. Следовательно, степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится регулярно на каждом замкнутом интервале, лежащем строго внутри интервала сходимости.

Замечание 2. На всем интервале сходимости степенной ряд может сходиться неравномерно. Например, ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

на своем интервале сходимости $-1 < x < 1$ сходится неравномерно, так как модуль разности между его суммой и частичной суммой при любом фиксированном n неограниченно возрастает при $x \to 1$ и, следовательно, не может оставаться меньше конечного $\varepsilon > 0$ сразу при всех x из интервала $-1 < x < 1$. Однако справедлива

Теорема 8.7$_1$. Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится в конце $x = R$ интервала сходимости $(-R, R)$, то он сходится равномерно на замкнутом интервале $[0, R]$.

Доказательство. Докажем, что на замкнутом интервале $[0, R]$ будет выполнен критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Отсюда будет следовать равномерная сходимость ряда на $[0, R]$. Введем обозначение

$$S_{n, p} = c_{n+1}R^{n+1} + \ldots + c_{n+p}R^{n+p}, \qquad p = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered} c_{n+1}R^{n+1} = S_{n, 1}, \\ c_{n+2}R^{n+2} = S_{n, 2} - S_{n, 1}, \ \ldots, \ c_{n+p}R^{n+p} = S_{n, p} - S_{n, p-1}. \end{gathered} \tag{α}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Так как числовой ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k R^k$ по условию сходится, то, в силу критерия Коши для числового ряда, существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будет

$$|S_{n, k}| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{β}$$

Учитывая, что $\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1} \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{n} \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant R$, и используя ($\alpha$) и ($\beta$), получим

$$|c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \ldots + c_{n+p}x^{n+p}| =$$
$$= \left| c_{n+1}R^{n+1}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} + c_{n+2}R^{n+2}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} + \ldots + c_{n+p}R^{n+p}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \right| =$$

$$=\left|S_{n,1}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}\right]+S_{n,2}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+3}\right]+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+S_{n,p-1}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}\right]+S_{n,p}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|S_{n,1}|\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}\right]+|S_{n,2}|\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+3}\right]+\ldots$$

$$\ldots+|S_{n,p-1}|\left[\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}\right]+|S_{n,p}|\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}<$$

$$<\varepsilon\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}+\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2}-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+3}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots-\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}+\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p}\right\}=\varepsilon\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1}\leqslant\varepsilon$$

при всех $n>N(\varepsilon)$, всех $p=1, 2, \ldots$ и сразу для всех x из отрезка $0\leqslant x\leqslant R$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Аналогично обстоит дело, если ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится в левом конце интервала сходимости $(-R, R)$ или в обоих концах, тогда он сходится равномерно на $[-R, 0]$ или соответственно на $[-R, R]$.

Замечание 2. Если в конце $x=R$ интервала сходимости $(-R, R)$ степенной ряд расходится, то он не может сходиться равномерно на интервале $0\leqslant x\leqslant R$, иначе по теореме о почленном переходе к пределу в равномерно сходящемся ряде мы получили бы, что он будет сходиться и в конце $x=R$.

Из теорем о равноменной сходимости степенного ряда и непрерывности членов степенного ряда вытекает следующая

Теорема 8.8. *Сумма степенного ряда*

$$S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \tag{8.70}$$

непрерывна в каждой внутренней точке интервала сходимости *).

Доказательство. Если точка x лежит внутри интервала сходимости $(-R, R)$ ряда (8.70), то ее можно заключить в замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$, лежащий строго внутри интервала сходимости (рис. 8.4). На интервале $[\alpha, \beta]$ ряд (8.70) сходится равномерно и его члены непрерывны. Следовательно, его сумма будет непрерывной на интервале $[\alpha, \beta]$, а значит, и в точке x этого интервала. Теорема доказана.

---

*) Здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что интервал сходимости ряда (8.70) не вырождается в точку.

Замечание. Если ряд (8.70) сходится в каком-либо из концов интервала сходимости $(-R, R)$, то его сумма будет непрерывной и в этом конце. Это вытекает из равномерной сходимости ряда (8.70) на соответствующем замкнутом интервале вида $[-R, 0]$ или $[0, R]$ (см. теорему 8.7_1).

3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.

Теорема 8.9. *Степенной ряд* (8.70) *можно дифференцировать почленно во внутренних точках интервала сходимости, т. е. в них его сумма* $S(x)$ *дифференцируема и выполняется равенство*

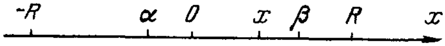

Рис. 8.4.

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} kc_k x^{k-1}, \qquad (8.71)$$

причем производный ряд (8.71) *имеет тот же интервал сходимости, что и ряд* (8.70).

Доказательство. Обозначим соответственно через R и R' радиусы сходимости рядов (8.70) и (8.71). Докажем сначала, что $R'=R$. Если $x\in(-R', R')$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k|c_k||x|^{k-1}$ сходится, поэтому сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k|c_k||x|^k$, а значит, и ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}|c_k||x|^k$, следовательно, $x\in(-R, R)$. Поэтому $R'\leqslant R$. Если $x\in(-R, R)$, то можно выбрать такое $x_0\in(-R, R)$, чтобы выполнялось неравенство $|x_0|>|x|$ $(x_0\neq 0)$. Так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x_0^k$ сходится, то $c_k x_0^k\to 0$ при $k\to+\infty$; значит, найдется такая константа $A>0$, что будет $|c_k x_0^k|<A$ при всех $k=0, 1, 2, \ldots$ Поэтому имеет место следующая оценка для членов ряда (8.71):

$$|kc_k x^{k-1}|\equiv\frac{1}{|x_0|}k|c_k x_0^k|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1}<\frac{A}{|x_0|}k\left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1}. \qquad (8.72)$$

При $|x|<|x_0|$, т. е. при $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{A}{|x_0|}k\left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1}$ сходится, что легко устанавливается с помощью признака Даламбера. Действительно, при $k\to+\infty$ будет

$$\frac{A}{|x_0|}(k+1)\left|\frac{x}{x_0}\right|^{k+1}:\frac{A}{|x_0|}k\left|\frac{x}{x_0}\right|^{k}=\left(1+\frac{1}{k}\right)\left|\frac{x}{x_0}\right|\to\left|\frac{x}{x_0}\right|<1.$$

Но тогда по признаку сравнения, в силу соотношений (8.72), ряд (8.71) при данном x также сходится, т. е. $x\in(-R', R')$. Следовательно, $R\leqslant R'$. Сопоставляя это с полученным ранее неравенством $R'\leqslant R$, заключаем, что $R'=R$.

Теперь мы можем воспользоваться тем, что на каждом замкнутом интервале, лежащем строго внутри интервала сходимости $(-R, R)$, ряды (8.70) и (8.71) сходятся равномерно, а члены их непрерывны. Это означает, что заведомо выполнены условия теоремы 8.3 о почленном дифференцировании функционального ряда, откуда и следует справедливость доказываемой теоремы.

Следствие. *Сумма степенного ряда* $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ *имеет производные всех порядков, причем*

$$S^{(n)}(x)=\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)c_k x^{k-n}, \quad n=1, 2, \ldots \tag{8.73}$$

Радиус сходимости ряда (8.73) *совпадает с радиусом сходимости ряда* $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

Доказательство этого следствия получается повторным применением теоремы 8.9 к производному ряду (8.71), затем к полученному из него таким же образом производному ряду второго порядка и т. д.

Теорема 8.10. *Степенной ряд*

$$S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \tag{8.70}$$

можно интегрировать почленно в интервале сходимости; в частности, имеет место равенство

$$\int_0^x S(z)\,dz=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \tag{8.74}$$

причем радиусы сходимости рядов (8.70) *и* (8.74) *совпадают.*

Доказательство. Ряд (8.70) состоит из непрерывных функций, поэтому его можно интегрировать почленно на интервалах равномерной сходимости. Какова бы ни была точка $x\in(-R, R)$, ее всегда можно заключить в замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$, лежащий строго внутри интервала $(-R, R)$ и содержащий начало координат. Интегрируя в этом интервале от 0 до x ряд (8.70) почленно, получим равенство (8.74), что и требовалось доказать.

Замечание. Если ряд (8.70) сходится в каком-либо из концов интервала сходимости $(-R, R)$, то x в равенстве (8.74) может совпадать с этим концом, так как тогда ряд (8.70) сходится равномерно на соответствующем замкнутом интервале $[-R, 0]$ или $[0, R]$.

4. Арифметические операции над степенными рядами. Остановимся сначала на сложении, вычитании и умножении. Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad (\alpha)$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \qquad (\beta)$$

причем радиусы сходимости рядов (α) и (β) равны соответственно $R_a > 0$ и $R_b > 0$. Тогда

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \pm b_n) x^n \text{ при } |x| < \min(R_a, R_b), \qquad (\gamma)$$

$$f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) x^n$$

$$\text{при } |x| < \min(R_a, R_b). \qquad (\delta)$$

Справедливость соотношения (γ) очевидна (см. вып. 1, гл. 13, § 4); соотношение (δ) получается по теореме об умножении абсолютно сходящихся рядов (см. вып. 1, гл. 13, § 4), так как при $|x| < \min(R_a, R_b)$ оба ряда (γ) и (δ) сходятся абсолютно.

Рассмотрим, наконец, деление. Если $R_a > 0$, $R_b > 0$ и $b_0 \neq 0$, то при достаточно малых значениях $|x|$ имеет место следующее разложение в степенной ряд частного:

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots} =$$

$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

коэффициенты c_i которого могут быть найдены по рекуррентным формулам, получающимся в результате умножения степенных рядов в правой части равенства

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \equiv$$

$$\equiv (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)$$

и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x в правой и левой частях результирующего равенства. Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ может быть также получен делением ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ на ряд $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$ по тем же правилам, по которым делятся многочлены, расположенные по возрастающим степеням x. На доказательстве этих утверждений мы останавливаться не будем.