§ 4. Разложение функций в степенные ряды

Говорят, что *функция* $f(x)$ *разлагается в степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ *на интервале* $(-r, r)$, *если на этом интервале данный степенной ряд сходится и его сумма равна* $f(x)$, *т. е.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \tag{8.75}$$

на интервале $(-r, r)$, при этом предполагается, что интервал $(-r, r)$ не вырождается в точку *). О роли, которую играют разложения функций в степенные (и другие функциональные) ряды, мы уже говорили в начале главы. В конце этого параграфа мы дадим характерные примеры применения разложений в степенные ряды при вещественных значениях x. Степенным рядам в комплексной области посвящен § 5 этой главы.

1. Основные теоремы о разложениях функций в степенные ряды; разложения элементарных функций. Докажем прежде всего, что одна и та же функция $f(x)$ не может иметь двух различных разложений вида (8.75), так как справедлива

Теорема 8.11. *Степенной ряд*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \tag{8.76}$$

сходящийся на интервале $(-R, R)$ *(не вырождающемся в точку), является рядом Тейлора для своей суммы* $f(x)$, *т. е. его коэффициенты находятся по формулам Тейлора*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8.77}$$

а следовательно, коэффициенты степенного ряда (8.76) *определяются по его сумме однозначно.*

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться следствием из теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда. В силу этого следствия, сумма $f(x)$ ряда (8.75) бесконечно дифференцируема и имеет место равенство

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)\,c_k x^{k-n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8.78}$$

---

*) Если $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-r, r)$ в степенной ряд, то она называется аналитической функцией переменной x на этом интервале.

Полагая в (8.78) $x=0$, получим

$$f^{(n)}(0)=n!\,c_n,$$

а следовательно,

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

что и требовалось доказать. Итак, если функцию $f(x)$ можно разложить в сходящийся к ней степенной ряд, то он является для этой функции *рядом Тейлора*.

Возникает вопрос, справедливо ли обратное утверждение? Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $(-R,\ R)$, где $R\neq 0$, и для нее формально построен ряд Тейлора

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ \dots\ +\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ \dots, \qquad (8.79)$$

то будет ли он сходиться на интервале $(-R,\ R)$, и если да, то будет ли его сумма равна функции $f(x)$? В общем случае ответ на этот вопрос является отрицательным, как показывает пример функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{при} \quad x=0.\end{cases} \qquad (8.80)$$

Эта функция бесконечно дифференцируема на всей оси x, причем в начале координат

$$f(0)=f'(0)=\ \dots\ =f^{(n)}(0)=f^{(n+1)}(0)=\ \dots\ =0. \qquad (8.81)$$

Следовательно, все коэффициенты ряда Тейлора для этой функции равны нулю; ряд Тейлора сходится на всей оси x, и его сумма тождественно равна нулю, в то время как данная функция равна нулю только в начале координат.

Теорема 8.12. *Для того чтобы функцию $f(x)$ можно было разложить в степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_kx^k$ на интервале $(-R,\ R)$, $R\neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ имела на этом интервале производные всех порядков и чтобы остаточный член в формуле Тейлора*

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\ \dots\ +\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n \qquad (8.82)$$

стремился к нулю при всех $x\in(-R,\ R)$, когда $n\to+\infty$.

Доказательство. Если $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_kx^k$ на интервале $(-R,\ R)$, то, в силу следствия теоремы 8.9, она имеет производные всех порядков, и по теореме 8.11 равенство $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ может быть переписано в виде

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (8.83)$$

Равенство (8.83) означает, что разность между суммой и частичной суммой ряда (8.83), равная, согласно (8.82), остаточному члену в формуле Тейлора, должна стремиться к нулю при $n\to+\infty$ для всех $x\in(-R, R)$.

Обратно, если $f(x)$ имеет производные всех порядков на интервале $(-R, R)$ и в формуле Тейлора (8.82) $R_n\to 0$ при $n\to+\infty$ для каждого $x\in(-R, R)$, то

$$\left|f(x)-\left[f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right]\right|\to 0$$

при $n\to+\infty$ для каждого $x\in(-R, R)$, а следовательно, ряд (8.83) сходится и его сумма равна $f(x)$ на интервале $(-R, R)$, что и требовалось доказать.

Удобные достаточные условия разложимости функции в степенной ряд содержит следующая

Теорема 8.13. *Для того чтобы функцию $f(x)$ можно было разложить в степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ на интервале $(-R, R)$, достаточно, чтобы $f(x)$ имела на $(-R, R)$ производные всех порядков и чтобы существовала такая константа M, что*

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M \quad \textit{при} \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \quad \textit{и всех} \quad x\in(-R, R), \qquad (8.84)$$

т. е. чтобы производные всех порядков были равномерно ограничены в совокупности на интервале $(-R, R)$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ имеет производные всех порядков на $(-R, R)$, то для нее можно формально построить ряд Тейлора. Докажем, что он сходится к $f(x)$. Для этого, согласно теореме 8.12, достаточно доказать, что остаточный член в формуле Тейлора (8.82) стремится к нулю при $n\to+\infty$ и всех $x\in(-R, R)$. Воспользовавшись формой Лагранжа *) для R_n, получим, в силу (8.84), следующую оценку:

$$|R_n|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{при } n=0,\ 1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ x\in(-R, R),\quad 0<\theta<1. \qquad (8.85)$$

---

*) См. вып. 1, гл. 8, § 9.

Нетрудно проверить с помощью признака Даламбера, что ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится; поэтому, в силу необходимого признака сходимости, будет $\frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to +\infty$. Значит, в силу оценки (8.85), будет $R_n \to 0$ при $n \to +\infty$ и всех $x \in (-R, R)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим некоторые важные примеры разложения функций в степенной ряд, т. е. в ряд Тейлора.

1. Для функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ имеем $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ при всех $n = 0, 1, 2$ и всех x, $-\infty < x < +\infty$, поэтому каждая из них разлагается в степенной ряд, сходящийся на всей числовой оси.

Вычисляя коэффициенты Тейлора $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

2. Для функции $f(x) = e^x$ производные всех порядков на отрезке $(-R, R)$ удовлетворяют условию $|f^{(n)}(x)| = e^x \leqslant e^R$. Следовательно, показательная функция $f(x) = e^x$ разлагается в степенной ряд на любом интервале $(-R, R)$ оси x, т. е. на всей оси x.

Вычисляя коэффициенты Тейлора, получим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

3. К функции $f(x) = \ln(1+x)$ целесообразно применить следующий прием. Дифференцируя ее по x и разлагая полученную производную по формуле геометрической прогрессии, получим

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \quad \text{при} \quad -1 < x < 1.$$

Интегрируя это равенство почленно, на основании теоремы 8.3 будем иметь

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad \text{при} \quad -1 < x < 1. \qquad (8.86)$$

Разложение (8.86) остается справедливым и при $x = 1$. Действительно, так как ряд (8.86) сходится при $x = 1$ (по признаку Лейбница), то его сумма

$$S(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

будет непрерывной (в силу замечания к теореме 8.3) на отрезке [0, 1]. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1-0} S(x)=S(1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ Функция $f(x)=\ln(1+x)$ также непрерывна на этом отрезке, поэтому $\ln 2=\ln(1+x)|_{x=1-0}$. Но при $0\leqslant x<1$ выполняется, согласно (8.86), равенство $\ln(1+x)=S(x)$. Следовательно,

$$\ln 2=\lim_{x\to 1-0}\ln(1+x)=\lim_{x\to 1-0}S(x)=S(1)=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

4. Функцию $f(x)=\operatorname{arctg} x$ можно разложить в степенной ряд аналогичным образом. Дифференцируя и применяя для производной разложение по формуле геометрической прогрессии, находим

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots \quad \text{при} \quad -1<x<1.$$

Интегрируя почленно, получим

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots \quad \text{при} \quad -1<x<1.$$

Что это разложение остается справедливым и в точке $x=1$, можно показать так же, как была доказана в предыдущем примере справедливость разложения

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

5. Напишем формально ряд Тейлора для функции $f(x)=(1+x)^\alpha$, где α — произвольное отличное от нуля действительное число:

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots=$$
$$=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k. \qquad (8.87)$$

При целом положительном $\alpha=n$ все члены ряда (8.87), начиная с $(n+1)$-го, обращаются в нуль, и мы приходим к обычной формуле бинома Ньютона. Применяя признак Даламбера (при $\alpha\neq n$, $n=0, 1, 2, \ldots$) легко установить, что радиус сходимости ряда (8.87) равен 1. Следовательно, вне отрезка $[-1, 1]$ функция $(1+x)^\alpha$

при α, не являющемся целым положительным числом, заведомо не может быть разложена в степенной ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, т. е. по целым неотрицательным степеням x. Покажем, что внутри этого отрезка будет справедливо разложение

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots = $$
$$=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k. \qquad (8.88)$$

Для этого достаточно доказать, согласно теореме 8.12, что остаточный член в формуле Тейлора для функции $(1+x)^\alpha$ будет стремиться к нулю при $n\to+\infty$ для всех x из интервала $(-1, 1)$.

Остаточный член в формуле Тейлора возьмем в форме Коши:

$$R_n=\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}f^{(n+1)}(\theta x), \qquad 0<\theta<1.$$

Для функции $(1+x)^\alpha$ он примет вид

$$R_n=\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n}=$$
$$=\left[\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^n\right]\cdot\left[\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right]\cdot\left[\alpha x(1+\theta x)^\alpha\right]. \qquad (8.89)$$

Так как $x>-1$, то $0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$, а следовательно, $0<\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n<1$ при всех $n=1, 2, 3, \ldots$ Далее, при всех $x\in(-1, 1)$, в силу неравенства $0<\theta<1$, $|\alpha x|(1+\theta x)^\alpha$ будет заключено между $|\alpha x|(1-|x|)^\alpha$ и $|\alpha x|(1+|x|)^\alpha$, а последние величины не зависят от n. Наконец, множитель $\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^n$ является n-м членом ряда Тейлора для функции $(1+x)^{\alpha-1}$, сходимость которого при $-1<x<1$ легко доказывается с помощью признака Даламбера. Поэтому при $-1<x<1$, в силу необходимого признака сходимости, будем иметь

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^n\to 0$$

при $n\to+\infty$. Таким образом, при $-1<x<1$ две из квадратных скобок в (8.89) остаются ограниченными, а третья стремится к нулю при $n\to+\infty$; следовательно, $R_n\to 0$ при $n\to+\infty$ для каждого $x\in(-1, 1)$. Этим доказательство справедливости разложения (8.88) на интервале $-1<x<1$ завершено.

2. Некоторые применения степенных рядов.

а) ***Степенные ряды могут применяться для приближенных вычислений значений функций.*** Ряды

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{8.90}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots, \tag{8.91}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots \tag{8.92}$$

можно использовать для вычисления значений e^x, $\sin x$ и $\cos x$ при любых значениях x с любой степенью точности, поскольку равенства (8.90) — (8.92) выполняются на всей оси x.

Если в качестве приближенных значений этих функций брать частичные суммы рядов (8.90) — (8.92) соответственно, то допускаемые при этом погрешности особенно просто оцениваются в случае рядов (8.91) и (8.92), в силу признака Лейбница погрешность не превосходит первого из отброшенных членов *).

Ряд для логарифма

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \ldots, \tag{8.93}$$
$$-1 < x \leqslant 1,$$

хотя и знакопеременный, но сходится медленно, а при $x > 1$ расходится. Чтобы ускорить сходимость ряда и сделать возможным вычисление логарифмов чисел, больших единицы, из разложения (8.93) вычитают разложение

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{8.93$'$}$$

Это дает

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \ldots\right). \tag{8.94}$$

Полагая в (8.94) $x = \frac{1}{2n+1}$, получают

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n =$$
$$= \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \ldots\right). \tag{8.95}$$

Отправляясь от $\ln 1 = 0$, можно с помощью ряда (8.95), сходящегося достаточно быстро, найти логарифмы всех натуральных чисел.

---

*) Ср. с вып. 1, гл. 13, § 5.

Ряд для арктангенса

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \tag{8.96}$$

можно использовать для вычисления числа π с любой степенью точности. Именно, полагая в (8.96) $x=1$, получим

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \tag{8.97}$$

В силу знакопеременности этого ряда, легко оценивается погрешность, допускаемая при замене его суммы частичной суммой.

Ряд

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

можно использовать для извлечения корней. Например,

$$\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{4}} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= 2\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{8.98}$$

Выписанные члены дают значение этого корня с четырьмя верными знаками. Ряд (8.98) — знакопеременный, поэтому погрешность оценивается легко.

б) ***Разложение в степенные ряды можно использовать для вычисления интегралов, не берущихся в элементарных функциях.*** Например, используя ряд (8.91) для $\sin x$, получим

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\xi = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots \tag{8.99}$$

Заметим, что деление ряда (8.91) на x при $x \neq 0$ законно, так что

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots \tag{$*$}$$

при $x \neq 0$. При $x=0$ полагаем $\frac{\sin x}{x} = 1$; тогда равенство ($*$) сохранится и при $x=0$. Ряд (8.99) — знакопеременный, так что погрешность при замене его суммы частичной суммой оценивается очень просто.

в) ***Степенные ряды*** (не только по целым положительным степеням x) ***находят широкое применение при интегрировании дифференциальных уравнений***, причем это приводит, вообще говоря, к построению новых функций, о чем подробно будет идти речь в вып. 3 и 4 настоящего курса. Мы же ограничимся здесь одним элементарным примером. Пусть требуется разложить в степенной ряд функцию $F(x) = e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{\xi^2}\,d\xi$. Легко проверить, что $F(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$F'(x) + 2xF(x) = 1 \tag{8.100}$$

и начальному условию $F(0) = 0$. Будем искать решение уравнения (8.100) в виде степенного ряда

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{8.101}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (8.100) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим

$$c_1 = 1, \quad (n+2)\,c_{n+2} + 2c_n = 0, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{8.102}$$

Из начального условия $F(0) = 0$ находим

$$c_0 = 0. \tag{8.103}$$

С помощью (8.102) и (8.103) из (8.101) получаем

$$F(x) = e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{\xi^2}\,d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{2n+1}}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}. \tag{8.104}$$

Сначала ряд (8.101) мы дифференцировали почленно ф о р м а л ь н о, теперь, когда коэффициенты его уже известны, мы видим, что ряд (8.104) сходится при всех x, $-\infty < x < +\infty$, и, следовательно, почленное дифференцирование з а к о н н о при всех значениях x (см. теорему 8.9).

§ 5. Степенные ряды в комплексной области

Последовательность к о м п л е к с н ы х чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \ \ldots, \ z_n = x_n + iy_n, \ \ldots \tag{A}$$

называется *сходящейся* к комплексному числу $z_0 = x_0 + iy_0$ при $n \to +\infty$, если

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поэтому для сходимости последовательности (A) к числу $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$x_n \to x_0 \quad \text{и} \quad y_n \to y_0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$