речь в вып. 3 и 4 настоящего курса. Мы же ограничимся здесь одним элементарным примером. Пусть требуется разложить в степенной ряд функцию $F(x)=e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{\xi^2}\,d\xi$. Легко проверить, что $F(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$F'(x)+2xF(x)=1 \tag{8.100}$$

и начальному условию $F(0)=0$. Будем искать решение уравнения (8.100) в виде степенного ряда

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots \tag{8.101}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (8.100) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим

$$c_1=1,\quad (n+2)\,c_{n+2}+2c_n=0,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{8.102}$$

Из начального условия $F(0)=0$ находим

$$c_0=0. \tag{8.103}$$

С помощью (8.102) и (8.103) из (8.101) получаем

$$F(x)=e^{-x^2}\int\limits_0^x e^{\xi^2}\,d\xi=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,2^n x^{2n+1}}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}. \tag{8.104}$$

Сначала ряд (8.101) мы дифференцировали почленно ф о р м а л ь н о, теперь, когда коэффициенты его уже известны, мы видим, что ряд (8.104) сходится при всех x, $-\infty<x<+\infty$, и, следовательно, почленное дифференцирование з а к о н н о при всех значениях x (см. теорему 8.9).

§ 5. Степенные ряды в комплексной области

Последовательность к о м п л е к с н ы х чисел

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2,\ \ldots,\ z_n=x_n+iy_n,\ \ldots \tag{A}$$

называется *сходящейся* к комплексному числу $z_0=x_0+iy_0$ при $n\to+\infty$, если

$$|z_n-z_0|=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Поэтому для сходимости последовательности (A) к числу $z_0=x_0+iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$x_n\to x_0 \quad \text{и} \quad y_n\to y_0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Ряд с комплексными членами

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k,$$

где $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм.

На ряды с комплексными членами легко распространяются понятия абсолютной и условной сходимости, а также основной критерий сходимости, признак Даламбера и признак Коши*).

Областью сходимости степенного ряда

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{Б}$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ — комплексные числа, а $z = x + iy$ — комплексное переменное, является круг с центром в точке $z = 0$. Этот круг может вырождаться в точку $z = 0$ или занимать всю плоскость переменного $z = x + iy$. Внутри круга сходимости ряд (Б) сходится абсолютно. Справедливость этих утверждений вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Если степенной ряд* (Б) *сходится при* $z = \alpha \neq 0$, *то он сходится абсолютно при любом* z, *для которого* $|z| < |\alpha|$, *т. е. в круге* $|z| < |\alpha|$ *с центром в точке* $z = 0$ *и радиусом, равным* $|\alpha|$**).

В каждом круге, концентрическом с кругом сходимости и лежащем строго внутри него, степенной ряд сходится равномерно, и его сумма будет не только непрерывной, но и бесконечное число раз дифференцируемой функцией.

Отправляясь от разложений в степенные ряды элементарных функций действительного переменного:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{8.105}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots, \tag{8.106}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, \tag{8.107}$$

мы можем дать определение элементарных функций комплексного переменного $z = x + iy$: e^z, $\cos z$, $\sin z$, которые при $z = x$ совпадают соответственно с e^x, $\cos x$ и $\sin x$. Напомним, что ряды (8.105) —

*) Если члены ряда не являются положительными вещественными числами, то для применения признаков Даламбера и Коши нужно брать их модули.

**) Эта лемма была доказана для степенных рядов в действительной области (см. доказательство теоремы 8.5), но таким же образом она доказывается и для степенных рядов в комплексной области.

(8.107) сходятся при всех действительных значениях x, но тогда, в силу сформулированной выше леммы, они будут сходиться и при всех комплексных значениях z, если в них вместо x подставить z. Поэтому, полагая

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \tag{8.108}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots, \tag{8.109}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \ldots, \tag{8.110}$$

мы получим функции комплексного переменного z, определенные при всех значениях z. Умножая абсолютно сходящиеся (в силу леммы) ряды, можно проверить, что для определенных таким образом функций комплексного переменного e^z, $\cos z$, $\sin z$ выполняются соотношения

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \text{ *)} \tag{8.111}$$

и

$$\cos^2 z + \sin^2 z \equiv 1. \tag{8.112}$$

Заменяя в (8.108) z на iz и группируя отдельно в полученном ряде члены, явно содержащие и явно не содержащие i, получим, используя (8.109) и (8.110), замечательную формулу Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \tag{8.113}$$

справедливую при любом комплексном z. Действительно,

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \ldots = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$
$$\ldots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = \cos z + i \sin z.$$

Так как из соотношений (8.109) и (8.110) следует, что $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$, то, заменяя в формуле Эйлера z на $-z$, получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{8.114}$$

Из уравнений (8.113) и (8.114) находим

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{8.115}$$

Эти формулы также обычно называют формулами Эйлера.

---

*) Равенство (8.111) получается путем умножения степенных рядов для e^{z_1} и e^{z_2} по правилам, которые были доказаны в действительной области и сохраняют силу в комплексной области.

Из формул (8.115) следует, что $\cos z$ и $\sin z$ в комплексной области могут принимать сколь угодно большие значения. Полагая, например, $z = -in$, где n — натуральное число, получим

$$\cos(-in) = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

При этом формула (8.112) остается справедливой.

С помощью степенных рядов в комплексной области можно определить и другие функции комплексного переменного, такие, как $\ln(1+z)$, $\operatorname{arctg} z$ и другие.

Теория функций комплексного переменного является одним из важнейших разделов современной математики и находит широкие применения в математической физике.

С точки зрения теории функций комплексного переменного находят более полное объяснение некоторые факты из анализа функций действительного переменного. Например, в равенстве

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \qquad (*)$$

левая часть непрерывна и ограничена на всей числовой оси, однако стоящий справа ряд при $|x| \geqslant 1$ расходится. Если рассматривать равенство (*) при комплексных значениях x, то причина этого явления становится ясной, так как при $x = i$ левая часть равенства обращается в бесконечность и, следовательно, окружность круга сходимости (с центром в начале координат) должна проходить через точку $x = i$. (Если бы эта точка лежала внутри круга сходимости, то в ней функция $\frac{1}{1+x^2}$ была бы непрерывной, а она при $x = i$ обращается в бесконечность.)

В § 4 была рассмотрена функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Эта функция имеет в начале координат производные по x всех порядков, но не разложима в степенной ряд по целым неотрицательным степеням x. Причина этого становится ясной, если рассмотреть функцию

$$\varphi(z) = e^{-\frac{1}{z^2}} \ (z \neq 0),$$

считая, что z принимает комплексные значения. Беря $z = iy$, получим $e^{-\frac{1}{z^2}} = e^{\frac{1}{y^2}} \to +\infty$ при $y \to 0$, в то время как $e^{-\frac{1}{x^2}} \to 0$ при $x \to 0$. Следовательно, эту функцию нельзя доопределить в начале координат таким образом, чтобы она стала непрерывной. Если бы существовал степенной ряд, сходящийся к $\varphi(x)$ на некотором отрезке $-R<x<R$, то при замене x на z получился бы степенной ряд, сходящийся к $\varphi(x)$ в круге $|z|<R$, и функция $\varphi(z)$ была бы в точке $z=0$ непрерывной и даже дифференцируемой по z, а она разрывна. Исчерпывающий анализ этого примера также может быть выполнен лишь в теории функций комплексного переменного.

§ 6. Сходимость в среднем

В ряде разделов математики и ее приложений используется близость функций $f(x)$ и $g(x)$ в некотором интегральном смысле, допускающем в отдельных точках большие значения модуля разности $f(x)-g(x)$. Обычно в качестве меры интегральной близости берут «квадратичное уклонение» и рассматривают тесно связанную с ним «сходимость в среднем».

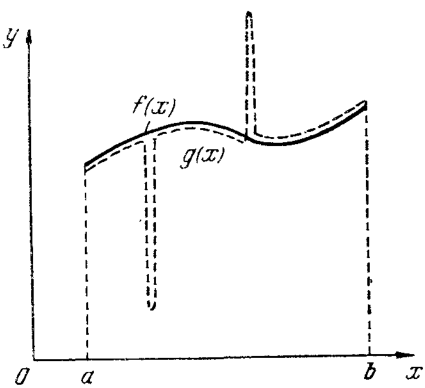

Рис. 8.5.

1. Квадратичное уклонение и сходимость в среднем.

Определение 1. *Квадратичным уклонением функции $f(x)$ от $g(x)$ на $[a, b]$ называется неотрицательное число*

$$\rho^2(f, g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,dx\ ^{*)}. \tag{8.116}$$

Очевидно, что

$$\rho^2(f, g)=\rho^2(g, f).$$

Графики двух функций $f(x)$ и $g(x)$, близких в смысле малости квадратичного уклонения, могут сильно отклоняться друг от друга в отдельных точках (рис. 8.5).

Определение 2. *Последовательность функций*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{8.117}$$

называют сходящейся в среднем к функции $f(x)$ на $[a, b]$, если

$$\rho^2(f_n, f)=\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2\,dx \to 0 \quad \text{при } n\to+\infty. \tag{8.118}$$

---

*) Все функции в настоящем параграфе будут предполагаться интегрируемыми в обычном смысле, хотя большая часть понятий и утверждений этого параграфа сохраняет силу и для функций, интегрируемых с квадратом в смысле несобственного интеграла.