степенной ряд, сходящийся к $\varphi(x)$ на некотором отрезке $-R<x<R$, то при замене x на z получился бы степенной ряд, сходящийся к $\varphi(x)$ в круге $|z|<R$, и функция $\varphi(z)$ была бы в точке $z=0$ непрерывной и даже дифференцируемой по z, а она разрывна. Исчерпывающий анализ этого примера также может быть выполнен лишь в теории функций комплексного переменного.

§ 6. Сходимость в среднем

В ряде разделов математики и ее приложений используется близость функций $f(x)$ и $g(x)$ в некотором интегральном смысле, допускающем в отдельных точках большие значения модуля разности $f(x)-g(x)$. Обычно в качестве меры интегральной близости берут «квадратичное уклонение» и рассматривают тесно связанную с ним «сходимость в среднем».

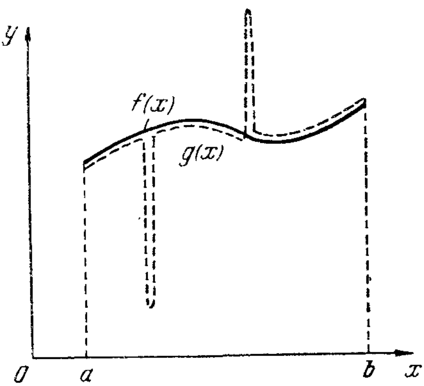

Рис. 8.5.

1. Квадратичное уклонение и сходимость в среднем.

Определение 1. *Квадратичным уклонением функции $f(x)$ от $g(x)$ на $[a, b]$ называется неотрицательное число*

$$\rho^2(f, g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx \text{ *)}. \tag{8.116}$$

Очевидно, что

$$\rho^2(f, g)=\rho^2(g, f).$$

Графики двух функций $f(x)$ и $g(x)$, близких в смысле малости квадратичного уклонения, могут сильно отклоняться друг от друга в отдельных точках (рис. 8.5).

Определение 2. *Последовательность функций*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{8.117}$$

называют сходящейся в среднем к функции $f(x)$ на $[a, b]$, если

$$\rho^2(f_n, f)=\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2 dx \to 0 \quad \text{при } n\to+\infty. \tag{8.118}$$

---

*) Все функции в настоящем параграфе будут предполагаться интегрируемыми в обычном смысле, хотя большая часть понятий и утверждений этого параграфа сохраняет силу и для функций, интегрируемых с квадратом в смысле несобственного интеграла.

При этом пишут:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{на } [a, b]. \tag{8.119}$$

Определение 3. *Функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \tag{8.120}$$

называется сходящимся в среднем к $S(x)$ на отрезке $[a, b]$, если последовательность его частичных сумм

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{8.121}$$

сходится в среднем к $S(x)$ на $[a, b]$, т. е. если

$$\rho^2(S(x), S_n(x)) = \int_a^b \left[S(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right]^2 dx \to 0 \quad \text{при } n\to+\infty. \tag{8.122}$$

При этом пишут:

$$S(x) \doteq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \quad \text{на } [a, b]. \tag{8.123}$$

2. Неравенство Коши — Буняковского. *Если $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют на $[a, b]$ описанным выше требованиям, то*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}. \tag{8.124}$$

Доказательство. Положим

$$A = \int_a^b f^2(x)\,dx, \quad B = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad C = \int_a^b g^2(x)\,dx \tag{8.125}$$

и рассмотрим два возможных случая: 1) $A = C = 0$ и 2) по крайней мере одно из чисел A и C отлично от нуля.

1) Если $A = C = 0$, т. е.

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \int_a^b g^2(x)\,dx = 0,$$

то из очевидного неравенства

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$$

следует, что

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2}\left[\int_a^b f^2(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx\right] = 0.$$

Но

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx,$$

следовательно, $B = \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$, и неравенство (8.124) выполняется, так как в левой и правой его частях стоит нуль.

2) Пусть, например, $A > 0$. Тогда поступим следующим образом. Заметим, что при всех действительных значениях параметра λ

$$[\lambda f(x) + g(x)]^2 \geqslant 0,$$

т. е.

$$\lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)\,g(x) + g^2(x) \geqslant 0.$$

Интегрируя это неравенство по x от a до b и учитывая обозначения (8.125), получим, что при всех действительных λ

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geqslant 0, \tag{8.126}$$

причем $A > 0$. Но тогда квадратный трехчлен $A\lambda^2 + 2B\lambda + C$ не может иметь двух различных действительных корней $\lambda_1 < \lambda_2$, иначе его можно было бы представить в виде $A(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ и он принимал бы отрицательные значения при $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, что противоречит неравенству (8.126). Необходимым и достаточным условием отсутствия различных действительных корней является, как известно, неположительность дискриминанта трехчлена

$$B^2 - AC \leqslant 0. \tag{8.127}$$

Перенося произведение AC в правую часть неравенства и извлекая из обеих частей арифметический квадратный корень, получим $|B| \leqslant \sqrt{|A|}\cdot\sqrt{|C|}$, а это, если учесть обозначения (8.125), и есть неравенство Коши — Буняковского.

3. Интегрирование сходящихся в среднем последовательностей и рядов.

Теорема 8.14$_1$. *Если последовательность функций* $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ *сходится в среднем на отрезке* $[a, b]$ *к функции* $f(x)$, *то при любых* x_0 *и* x *на* $[a, b]$ *будет*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(z)\,dz = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz; \tag{8.128}$$

более того, при любом $x_0 \in [a, b]$ *имеет место равномерная по* x *сходимость*

$$\int_{x_0}^{x} f_n(z)\,dz \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz \quad \text{на} \quad [a, b]\,^{*}). \tag{8.129}$$

Доказательство. По условию

$$\rho^2(f, f_n) = \int_a^b [f(z) - f_n(z)]^2\,dz \to 0 \quad \text{при } n \to +\infty. \tag{8.130}$$

Чтобы доказать (8.129) (а следовательно, и (8.128)), оценим интеграл $\int_{x_0}^{x} [f(z) - f_n(z)]\,dz$. Для этого, представив подынтегральную функцию в виде произведения

$$[f(z) - f_n(z)] = 1 \cdot [f(z) - f_n(z)],$$

применим неравенство Коши — Буняковского

$$\left|\int_{x_0}^{x} [f(z) - f_n(z)]\,dz\right| \leqslant \sqrt{\int_{x_0}^{x} 1^2\,dz} \cdot \sqrt{\int_{x_0}^{x} |f(z) - f_n(z)|^2\,dz} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b |f(z) - f_n(z)|^2\,dz} = \sqrt{b-a}\,\sqrt{\rho^2(f, f_n)}. \tag{8.131}$$

Так как правая часть неравенства (8.131) от x не зависит и, в силу (8.130), стремится к нулю при $n \to +\infty$, то это и означает, что

$$\int_{x_0}^{x} [f(z) - f_n(z)]\,dz \rightrightarrows 0 \text{ на } [a, b],$$

т. е. соотношение (8.129) выполняется. Этим доказательство теоремы завершено.

Если разность $f(x) - f_n(x)$ заменить ее модулем, то вместо (8.131) при $x_0 = a$ и $x = b$ получим неравенство

$$\int_a^b |f(z) - f_n(z)|\,dz \leqslant \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\rho^2(f, f_n)}. \tag{8.132}$$

Интеграл в левой части (8.132) выражает площадь, заключенную

---

*) Напомним, что все функции в данном параграфе, в том числе $f_n(x)$ и $f(x)$, предполагаются интегрируемыми на $[a, b]$ в обычном смысле; см., однако, сноску на стр. 342.

между графиками $f_n(x)$ и $f(x)$ и ординатами $x=a$ и $x=b$. Таким образом, в случае сходимости в среднем $f_n(x)$ к $f(x)$ на $[a, b]$ эта площадь стремится к нулю, так как квадратичное уклонение $\rho^2(f, f_n)$ стремится к нулю. При этом максимум обычного отклонения $f_n(x)$ от $f(x)$ на $[a, b]$ может даже неограниченно возрастать. Например, последовательность $f_n(x)=n^{-\frac{1}{8}}\sqrt{2nx}\,e^{-\frac{1}{2}nx^2}$ сходится в среднем к $f(x)\equiv 0$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$, но

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|=f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\sqrt[4]{\frac{2}{e}}\,n^{\frac{1}{8}}\to+\infty \text{ при } n\to+\infty.$$

С помощью теоремы 8.14_1, доказанной для последовательностей, легко доказывается для рядов

Теорема 8.14$_2$. *Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ с интегрируемыми членами сходится в среднем к интегрируемой функции $S(x)$ на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_{x_0}^{x} S(z)\,dz=\int_{x_0}^{x} u_1(z)\,dz+\ldots+\int_{x_0}^{x} u_n(z)\,dz+\ldots \qquad (8.133)$$

при любых x_0 и $x\in[a, b]$, причем ряд (8.133) сходится к своей сумме равномерно на $[a, b]$.

Доказательство. Так как по условию $S_n(x)$ сходится в среднем к $S(x)$ на $[a, b]$, где $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, то по теореме 8.14

$$\int_{x_0}^{x} S_n(z)\,dz\rightrightarrows\int_{x_0}^{x} S(z)\,dz \quad \text{на} \quad [a, b], \qquad (8.134)$$

но

$$\int_{x_0}^{x} S_n(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(z)\,dz,$$

следовательно,

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(z)\,dz\right\}\rightrightarrows\int_{x_0}^{x} S(z)\,dz,$$

т. е. частичная сумма ряда (8.133) сходится равномерно к функции $\int_{x_0}^{x} S(z)\,dz$, что и требовалось доказать.

4. О связи между сходимостью в среднем и возможностью почленного дифференцирования последовательностей и рядов.

Теорема 8.15$_1$. *Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{f_n(x)\}$ сходится на $[a, b]$ к функции $f(x)$, а последовательность их производных $\{f'_n(x)\}$ сходится в среднем на $[a, b]$ к непрерывной функции $\varphi(x)$, то $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и*

$$f'(x)=\varphi(x)=\lim_{n\to+\infty} f'_n(x) \quad \text{на} \quad [a, b]. \tag{8.135}$$

Доказательство. Мы имеем при $x,\ x_0\in[a, b]$,

$$\left|f_n(x)-f_n(x_0)-\int_{x_0}^{x}\varphi(z)\,dz\right|=\left|\int_{x_0}^{x}[f'_n(x)-\varphi(z)]\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_{x_0}^{x}1^2dz}\cdot\sqrt{\int_{x_0}^{x}[f'_n(z)-\varphi(z)]^2\,dz}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{b-a}\cdot\sqrt{\rho^2(f'_n,\ \varphi)}\to 0 \tag{8.136}$$

при $n\to+\infty$. Следовательно, переходя к пределу и учитывая, что $f_n(x)\to f(x)$ и $f_n(x_0)\to f(x_0)$ при $n\to+\infty$, получим

$$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}\varphi(z)\,dz, \text{ т. е. } f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}\varphi(z)\,dz. \tag{8.137}$$

Из равенства (8.137) вытекает, что $f(x)$ дифференцируема и что имеет место равенство (8.135). Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается

Теорема 8.15$_2$. *Если функциональный ряд*

$$S(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(x) \tag{8.138}$$

с непрерывно дифференцируемыми членами сходится на $[a, b]$, а ряд

$$\sigma(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}u'_k(x) \tag{8.139}$$

сходится в среднем к непрерывной функции $\sigma(x)$, то сумма $S(x)$ ряда (138) *дифференцируема на $[a, b]$ и*

$$S'(x)=\sigma(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}u'_k(x). \tag{8.140}$$

Доказательство теоремы 8.15$_2$ предоставляем выполнить читателям.

5. Связь между сходимостью в среднем и другими видами сходимости. Из обычной сходимости последовательности функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... в каждой точке отрезка $[a, b]$

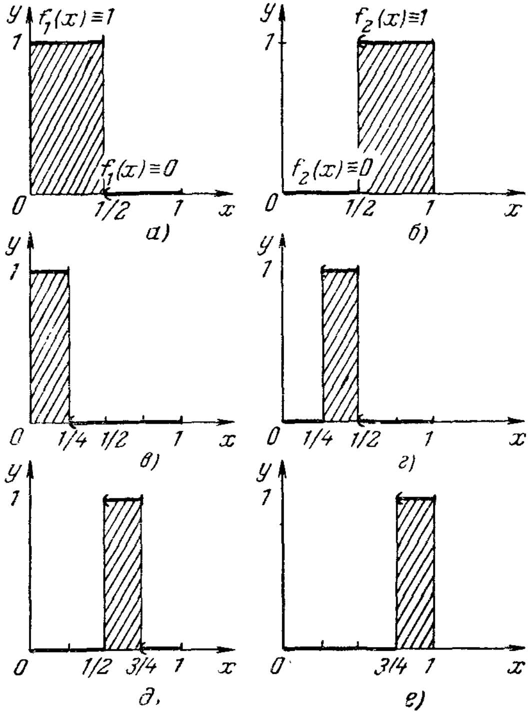

Рис. 8.6.

сходимость в среднем не вытекает. Например,

$$f_n(x)=\sqrt{2nx}\,e^{-\frac{1}{2}nx^2}\to f(x)\equiv 0 \quad \text{на отрезке } [0,\ 1],$$

но

$$\int_0^1 [f_n(x)-f(x)]^2\,dx=\int_0^1 2nxe^{-nx^2}\,dx=(1-e^{-n})\to 1 \text{ при } n\to+\infty.$$

Из равномерной сходимости вытекает сходимость в среднем. Действительно, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n>N(\varepsilon)$ неравенство $|f_n(x)-f(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$

выполняется сразу для всех $x \in [a, b]$, то, возводя в квадрат обе части этого неравенства и интегрируя, получим, что

$$\rho^2(f, f_n) = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

при всех $n > N(\varepsilon)$, т. е. что $\rho^2(f, f_n) \to 0$ при $n \to +\infty$, а это и означает сходимость в среднем $f_n(x)$ к $f(x)$ на $[a, b]$.

Из сходимости в среднем равномерная сходимость не вытекает; более того, не вытекает даже обычная сходимость в каждой точке. Рассмотрим пример последовательности функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ..., сходящейся в среднем к $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[0, 1]$ и не сходящейся на этом отрезке ни в одной точке. Построение этой последовательности будем вести шаг за шагом, подвергая отрезок $[0, 1]$ разбиению сначала на 2 равные части, затем на 2^2 равных частей и т. д., на 2^n равных частей и т. д. Разбив отрезок $[0, 1]$ на две равные части, определим $f_1(x)$ и $f_2(x)$, как указано на рис. 8.6, *а* и *б*. График функции изображен жирной линией, а маленькая дужка означает, что точка, через которую она проходит, к примыкающему куску графика не причисляется.

Разбив отрезок $[0, 1]$ на 2^2 равных частей, определим $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ и $f_6(x)$, как указано на рис. 8.6, *в*, *г*, *д*, *е*. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ..., каждая из которых принимает на отрезке $[0, 1]$ только два значения: 0 и 1, поэтому $f_n^2(x) \equiv f_n(x)$ на отрезке $[0, 1]$ при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

Докажем, что $f_n(x)$ сходится в среднем к $f(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$. Мы имеем

$$\rho^2(f, f_n) = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2\,dx = \int_0^1 f_n^2(x)\,dx = \int_0^1 f_n(x)\,dx \to 0$$

при $n \to +\infty$. Действительно, $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ равен площади заштрихованного прямоугольника, которая, очевидно, стремится к нулю при $n \to +\infty$. Сходимость в среднем доказана.

Однако последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... не сходится ни в одной точке отрезка $[0, 1]$, так как в каждой точке x этого отрезка при сколь угодно большом $N > 0$ найдутся функции с номером $n' > N$, имеющие в этой точке значение 0, и найдутся функции с номером $n'' > N$, имеющие в этой же точке значение 1.