ДОПОЛНЕНИЕ 1 К ГЛ. 8

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ

Вопрос о компактности семейства функций в математической физике возникает при доказательстве существования решений дифференциальных и интегральных уравнений и при доказательстве сходимости различных приближенных методов решения таких уравнений, но для его рассмотрения не требуется привлечения понятий теории дифференциальных или интегральных уравнений; по своему характеру он естественным образом примыкает к вопросам, рассмотренным в настоящей главе.

Определение 1. *Семейство функций* $\{f(x)\}$, *заданных на некотором множестве* X *точек* x, *мы будем называть компактным (в смысле равномерной сходимости), если из любой бесконечной последовательности функций* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... *данного семейства можно выделить подпоследовательность* $f_{n_1}(x)$, $f_{n_2}(x)$, ..., $f_{n_k}(x)$, ..., *равномерно сходящуюся на множестве* X *).

Определение 2. *Семейство функций* $\{f(x)\}$, *заданных на некотором множестве* X, *мы будем называть равномерно ограниченным на этом множестве, если существует такая константа* C, $0 < C < +\infty$, *что неравенство* $|f(x)| \leqslant C$ *выполняется сразу для всех* $x \in X$ *и для всех функций* $f(x)$ *из данного семейства.*

Определение 3. *Семейство функций* $\{f(x)\}$, *заданных на множестве* X, *называется равностепенно непрерывным на этом множестве, если для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *не зависящее от выбора функции* $f(x) \in \{f(x)\}$ *и выбора* x' *и* $x'' \in X$, *что для каждой функции* $f(x) \in \{f(x)\}$ *и любых* x' *и* $x'' \in X$, *удовлетворяющих неравенству* $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, *выполняется неравенство*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{1}$$

Теорема 1 (Арцела). *Если семейство функций* $\{f(x)\}$ *заданных на отрезке* $a \leqslant x \leqslant b$, *равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то оно компактно в смысле равномерной сходимости.*

Доказательство. Рассмотрим какое-либо счетное всюду плотное на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ множество M точек x_1, x_2, ..., x_n, ..., например множество всех рациональных точек этого отрезка или множество всех точек деления при последовательном делении

*) Аналогичным образом определяется компактность в смысле сходимости в среднем. Однако по этому поводу мы отсылаем к руководствам по функциональному анализу.

этого отрезка на 2, 4, 8, ..., 2^n, ... равных частей. Возьмем какую-либо последовательность функций $\{f_n(x)\}$ из данного семейства. В силу равномерной ограниченности семейства, $|f_n(x)| \leqslant C = \mathrm{const} < +\infty$ при всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ и сразу для всех $x \in M$. В частности, последовательность чисел $f_n(x_1)$, $n = 1, 2, \ldots$, будет ограниченной, так что по теореме Больцано — Вейерштрасса найдется сходящаяся подпоследовательность $f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \ldots, f_{1n}(x_1), \ldots$ В результате из последовательности функций $f_n(x)$ оказалась выделенной подпоследовательность

$$f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots, \tag{2_1}$$

сходящаяся в точке $x_1 \in M$.

Аналогично из последовательности (2_1) выделим подпоследовательность

$$f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots, \tag{2_2}$$

сходящуюся в точке $x_2 \in M$; последовательность (2_2) сходится также и в точке $x_1 \in M$, ибо она является подпоследовательностью последовательности (2_1), которая в точке x_1 сходится. Итак, последовательность (2_2) сходится в точках x_1 и x_2 множества M.

Продолжая неограниченно этот процесс выделения подпоследовательностей, получим бесконечную таблицу:

$$\begin{array}{l} f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots \\ f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(x),\ f_{n2}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{3}$$

в n-й строке которой ($n = 1, 2, 3, \ldots$) стоит подпоследовательность, сходящаяся в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Поэтому диагональная последовательность

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots \tag{4}$$

будет сходиться в каждой точке $x_n \in M$. Докажем, что она сходится равномерно на $[a, b]$. Для этого достаточно доказать, что данная последовательность (4) удовлетворяет критерию Коши для равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

Пусть дано какое угодно $\varepsilon > 0$. Сначала выберем из всюду плотного множества M такое конечное подмножество $\widetilde{M}[x_1, x_2, \ldots, x_p]$, чтобы его точки делили отрезок $[a, b]$ на частичные отрезки длины $< \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) > 0$ выбирается из условия равностепенной непрерывности семейства, т. е.

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x' - x''| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad x',\ x'' \in [a, b].$$

Тогда для каждого $x \in [a, b]$ найдется такое значение $x_i \in \widetilde{M}$, что $|x - x_i| < \delta(\varepsilon)$. Найдем, далее, по заданному $\varepsilon > 0$ такое $N(\varepsilon)$, не зависящее от x_i, $i=1, 2, \ldots, p$, что

$$|f_{mm}(x_i)-f_{nn}(x_i)|<\varepsilon \quad \text{при всех } m \quad \text{и} \quad n>N(\varepsilon) \tag{5}$$

и всех $i=1, 2, \ldots, p$. Тогда будет $|f_{mm}(x)-f_{nn}(x)|<3\varepsilon$ при всех m и $n>N(\varepsilon)$ и сразу для всех $x\in[a, b]$. Действительно, пусть m и $n>N(\varepsilon)$, а $x\in[a, b]$. Найдется такое значение $x_i\in\tilde{M}$, что $|x-x_i|<\delta(\varepsilon)$. Но тогда, в силу равностепенной непрерывности $|f_{mm}(x)-f_{mm}(x_i)|<\varepsilon$, $|f_{nn}(x)-f_{nn}(x_i)|<\varepsilon$, а следовательно, в силу (5), будет выполняться неравенство

$$|f_{mm}(x)-f_{nn}(x)|\leqslant|f_{mm}(x)-f_{mm}(x_i)|+|f_{mm}(x_i)-f_{nn}(x_i)|+$$
$$+|f_{nn}(x_i)-f_{nn}(x)|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.$$

Критерий Коши равномерной сходимости для последовательности (4) выполнен. Теорема доказана.

Теорема Арцела находит, например, применение при доказательстве существования решения дифференциальных уравнений.

Докажем еще одну теорему, существенно используемую в теории интегральных уравнений.

Теорема 2. *Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на $[a, b]$ и удовлетворяет условию*

$$\rho^2(f_n, f_m)=\int_a^b[f_m(x)-f_n(x)]^2\,dx\to 0 \quad \text{при} \quad n, m\to+\infty, \tag{6}$$

то она сходится равномерно на этом отрезке к некоторой непрерывной функции $f(x)$.

Доказательство. Докажем, что для этой последовательности выполнен критерий Коши равномерной сходимости, т. е. докажем, что

$$\varphi_{n,m}(x)=[f_n(x)-f_m(x)]\rightrightarrows 0 \quad \text{на} \quad [a, b] \quad \text{при} \quad n, m\to+\infty.$$

Допустим противное. Тогда найдется такое $\varepsilon_0>0$, что при как угодно больших k существуют такие $n_k>k$ и $x_k\in[a, b]$, для которых

$$\left|\varphi_{kn_k}(x_k)\right|\geqslant 4\varepsilon_0. \tag{7}$$

В силу равностепенной непрерывности последовательности, найдется $\delta=\delta(\varepsilon_0)$, для которого

$$|f_n(x)-f_n(x_k)|<\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad |x-x_k|<\delta(\varepsilon_0). \tag{8}$$

Следовательно, при $n_k>k>N(\varepsilon_0)$ и $|x-x_k|<\delta(\varepsilon_0)$ будет

$$\left|\varphi_{kn_k}(x)-\varphi_{kn_k}(x_k)\right|\leqslant\left|f_k(x)-f_k(x_k)\right|+$$
$$+\left|f_{n_k}(x)-f_{n_k}(x_k)\right|<2\varepsilon_0. \tag{9}$$

Но тогда, в силу (7) и (9), будем иметь

$$|\varphi_{kn_k}(x)| \geqslant |\varphi_{kn_k}(x_k)| - |\varphi_{kn_k}(x) - \varphi_{kn_k}(x_k)| \geqslant 4\varepsilon_0 - 2\varepsilon_0 = 2\varepsilon_0. \quad (10)$$

Если взять $\delta(\varepsilon_0) < b - a$, то по крайней мере половина интервала $x_k - \delta < x < x_k + \delta$ лежит на отрезке $[a, b]$. Следовательно, в силу (10), при $n_k > k > N(\varepsilon_0)$

$$\rho^2(f_{n_k}, f_k) = \int_a^b \varphi_{kn_k}^2(x)\,dx > 4\varepsilon_0^2 \frac{\delta}{2} = 2\varepsilon_0^2\delta = \text{const} > 0, \quad (11)$$

что противоречит условию (6), так как число k можно взять сколь угодно большим. Поэтому $\varphi_{mn}(x) = [f_m(x) - f_n(x)] \rightrightarrows 0$ на $[a, b]$ при n и $m \to +\infty$. Следовательно, в силу критерия Коши для равномерно сходящихся последовательностей, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $f(x)$, причем $f(x)$ непрерывна, как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ 2 К ГЛ. 8

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ И ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ

Наряду с равномерной сходимостью и сходимостью в среднем важную роль в математике и математической физике играет так называемая слабая сходимость.

Определение 1. *Последовательность функций*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \quad (1)$$

определенных и интегрируемых на (a, b), называется слабо сходящейся «в себе» на (a, b), если для всякой непрерывной и ограниченной на (a, b) функции $f(x)$ существует конечный предел

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx. \quad (2)$$

Определение 2. *Функция $\varphi(x)$ называется слабым пределом последовательности функций (1) на (a, b), если*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx, \quad (3)$$

для любой непрерывной и ограниченной на (a, b) функции $f(x)$ *).

*) Точнее, в этом случае говорят, что последовательность (1) сходится к $\varphi(x)$ слабо в классе функций, непрерывных на (a, b); можно определить слабую сходимость и в других классах функций.