Но тогда, в силу (7) и (9), будем иметь

$$|\varphi_{kn_k}(x)| \geqslant |\varphi_{kn_k}(x_k)| - |\varphi_{kn_k}(x) - \varphi_{kn_k}(x_k)| \geqslant 4\varepsilon_0 - 2\varepsilon_0 = 2\varepsilon_0. \quad (10)$$

Если взять $\delta(\varepsilon_0) < b - a$, то по крайней мере половина интервала $x_k - \delta < x < x_k + \delta$ лежит на отрезке $[a, b]$. Следовательно, в силу (10), при $n_k > k > N(\varepsilon_0)$

$$\rho^2(f_{n_k}, f_k) = \int_a^b \varphi_{kn_k}^2(x)\,dx > 4\varepsilon_0^2 \frac{\delta}{2} = 2\varepsilon_0^2\delta = \text{const} > 0, \quad (11)$$

что противоречит условию (6), так как число k можно взять сколь угодно большим. Поэтому $\varphi_{mn}(x) = [f_m(x) - f_n(x)] \rightrightarrows 0$ на $[a, b]$ при n и $m \to +\infty$. Следовательно, в силу критерия Коши для равномерно сходящихся последовательностей, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $f(x)$, причем $f(x)$ непрерывна, как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ 2 К ГЛ. 8

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ И ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ

Наряду с равномерной сходимостью и сходимостью в среднем важную роль в математике и математической физике играет так называемая слабая сходимость.

Определение 1. *Последовательность функций*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \quad (1)$$

определенных и интегрируемых на (a, b), называется слабо сходящейся «в себе» на (a, b), если для всякой непрерывной и ограниченной на (a, b) функции $f(x)$ существует конечный предел

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx. \quad (2)$$

Определение 2. *Функция $\varphi(x)$ называется слабым пределом последовательности функций (1) на (a, b), если*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx, \quad (3)$$

для любой непрерывной и ограниченной на (a, b) функции $f(x)$ *).

*) Точнее, в этом случае говорят, что последовательность (1) сходится к $\varphi(x)$ слабо в классе функций, непрерывных на (a, b); можно определить слабую сходимость и в других классах функций.

Если последовательность (1) сходится равномерно или в среднем к интегрируемой функции $\varphi(x)$, то, в силу теорем о предельном переходе под знаком интеграла, равенство (3) будет выполняться для каждой непрерывной и ограниченной функции $f(x)$; таким образом, из равномерной сходимости, а также из сходимости в среднем $\{\varphi_n(x)\}$ к $\varphi(x)$ вытекает *слабая* сходимость $\{\varphi_n(x)\}$ к $\varphi(x)$.

Если для любой непрерывной и ограниченной на (a, b) функции $f(x)$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0, \tag{4}$$

то, очевидно, последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится слабо к нулю на (a, b), так как равенство (4) можно переписать в виде

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\cdot 0\cdot dx. \tag{4'}$$

Применяя критерий Коши к последовательности чисел $\left\{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx\right\}$, получим следующий критерий слабой сходимости «в себе».

Критерий Коши (для слабо сходящихся последовательностей). *Для того чтобы последовательность* (1) *была слабо сходящейся «в себе» на* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы она была слабо фундаментальной, т. е. чтобы для каждой непрерывной функции* $f(x)$ *и для каждого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $N(\varepsilon, f)$, *что*

$$\left|\int_a^b f(x)[\varphi_n(x)-\varphi_m(x)]\,dx\right| < \varepsilon \tag{5}$$

при всех n и $m > N(\varepsilon, f)$.

Напомним, что не всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел сходится к рациональному числу, и это приводит к необходимости расширения запаса чисел и введению иррациональных чисел. Аналогично не всякая слабо фундаментальная последовательность интегрируемых функций сходится слабо к интегрируемой функции, и это приводит к необходимости расширения запаса функций и введению так называемых обобщенных функций.

Рассмотрим, например, последовательность функций $\{\delta_n(x_0, x)\}$, определяемых соотношениями

$$\delta_n(x_0, x) = \begin{cases} n & \text{при} \quad x_0 - \frac{1}{2n} < x < x_0 + \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{при} \quad -\infty < x < x_0 - \frac{1}{2n}, \quad x_0 + \frac{1}{2n} < x < +\infty. \end{cases} \tag{6}$$

Эта последовательность сходится слабо «в себе» на любом интервале (a, b).

Действительно, пусть $f(x)$ непрерывна на (a, b) и пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда, начиная с достаточно большого n, интервал $\left(x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n}\right)$ содержится в (a, b), и, применяя теорему о среднем к интегралу, мы получим, как при $x_0 \in (a, b)$, так и при $x_0 \notin [a, b]$

$$\int_a^b f(x)\delta_n(x_0, x)\,dx = n \int_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0 + \frac{1}{2n}} f(x)\,dx = f(\xi),$$
$$x_0 - \frac{1}{2n} \leqslant \xi \leqslant x_0 + \frac{1}{2n}. \tag{6'}$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to +\infty$, в силу непрерывности $f(x)$, получим

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x)\delta_n(x_0, x)\,dx = f(x_0). \tag{7}$$

Если же x_0 лежит вне сегмента $[a, b]$, найдем

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x)\delta_n(x_0, x)\,dx = 0. \tag{8}$$

Однако не существует никакой *обычной* интегрируемой функции, которая являлась бы слабым пределом последовательности $\{\delta_n(x_0, x)\}$. В качестве слабого предела этой последовательности вводят *обобщенную* функцию $\delta(x_0, x)$, называемую *δ-функцией* (*дельта-функцией*) с центром в точке x_0.

В силу определения слабого предела (см. равенство (3)) и в силу (7) и (8), для любой непрерывной на (a, b) функции $f(x)$ будем иметь

$$\int_a^b f(x)\delta(x_0, x)\,dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{при} \quad x_0 \in (a, b), \\ 0 & \text{при} \quad x_0 \notin [a, b]. \end{cases} \tag{9}$$

Иногда δ-функцию определяют формально соотношением (9).

Замечание. Вместо ограниченной и непрерывной на (a, b) функции $f(x)$ в соотношениях (7) и (8) можно, очевидно, брать кусочно-непрерывную ограниченную на (a, b) функцию $f(x)$, если в каждой точке разрыва x^* она доопределена равенством $f(x^*) = \frac{f(x^*-0)+f(x^*+0)}{2}$. Тогда равенство (9) естественно считать выполненным и для таких функций *).

Аналогично тому, как одно и то же иррациональное число можно определять с помощью различных эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел, так и одну и ту же обобщенную функцию можно определять с помощью различных эквивалентных слабо сходящихся последовательностей. При этом имеет место следующее

Определение 3. *Две слабо сходящиеся на (a, b) последовательности функций $\{\varphi_n(x)\}$, и $\{\psi_n(x)\}$ называются эквивалентными, если для любой непрерывной и ограниченной на (a, b) функции $f(x)$ выполняется равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)[\varphi_n(x)-\psi_n(x)]\,dx = 0.$$

При практическом применении δ-функции часто вместо рассмотренной нами последовательности $\{\delta_n(x_0, x)\}$ берут другие эквивалентные ей слабо сходящиеся последовательности, определяющие δ-функцию (см. Дополнение 5 к гл. 11). Характеризуя соотношение (9), которым формально определяется δ-функция, иногда говорят, что δ-функция обладает «выхватывающим» или «фильтрующим» свойством: умножая любую непрерывную функцию $f(x)$ на $\delta(x_0, x)$ и интегрируя их произведение по интервалу, в котором

*) Если x_0 — точка разрыва кусочно-непрерывной функции $f(x)$, причем $f(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, то для доказательства равенства (7) при $x_0 \in (a, b)$ нужно интеграл $\int\limits_{x_0-\frac{1}{2n}}^{x_0+\frac{1}{2n}} f(x)\,dx$ в соотношении (6′) разбить на два: $\int\limits_{x_0-\frac{1}{2n}}^{x_0} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{x_0}^{x_0+\frac{1}{2n}} f(x)\,dx$ и применять теорему о среднем к каждому из них.

определена $f(x)$ и в котором лежит x_0, мы «выхватываем» или «отфильтровываем» значение $f(x)$ в точке x_0.

Если каждой функции $f(x)$ из некоторого класса функций, определенных на (a, b), ставится однозначно в соответствие некоторое число, то говорят, что на этом классе функций определен функционал.

Например, пусть $\{f(x)\}$ — класс всех интегрируемых на (a, b) функций; тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ является функционалом, определенным на этом классе.

С помощью интеграла (9) при любом фиксированном $x_0 \in (a, b)$ также определяется функционал на классе всех функций, непрерывных на (a, b). Действительно, с помощью интеграла (9) каждой непрерывной на (a, b) функции $f(x)$ ставится однозначно в соответствие число $f(x_0)$, равное значению этой функции в точке $x_0 \in (a, b)$.

Иногда δ-функцию отождествляют с функционалом, который определялся соотношением (9). Такова одна из интерпретаций обобщенных функций, которая может быть положена в основу построения теории обобщенных функций.