ГЛАВА 9

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение интеграла как предела интегральной суммы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (9.1)$$

не охватывает случаев, когда подынтегральная функция не ограничена или интервал интегрирования бесконечен. Однако в математике и математической физике широко используются интегралы от неограниченных функций и интегралы с неограниченными областями интегрирования. Такие интегралы называются *несобственными*. Для их определения не достаточно одного предельного перехода вида (9.1), требуется еще дополнительный переход по области интегрирования. Именно, первоначальную область интегрирования, где определение (9.1) не годится, заменяют такой подобластью, где оно пригодно; предел интеграла, взятого по этой подобласти, когда она, расширяясь, стремится совпасть с первоначальной областью, называют несобственным интегралом по первоначальной области. Такова общая идея определения несобственного интеграла. Более точные формулировки будут приведены ниже.

§ 1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

1. Определения; примеры. Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \leqslant x < +\infty$ и пусть для каждого $B > a$ существует интеграл $\int_a^B f(x)\,dx$ (определяемый соотношением вида (9.1)).

Определение 1. *Несобственным интегралом* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется предел*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{B \to +\infty} \int_a^B f(x)\,dx. \qquad (9.2)$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится; в противном случае говорят, что он расходится.*

Замечание. Пусть $a_1 > a$. Тогда из равенства

$$\int\limits_a^B f(x)\,dx = \int\limits_a^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^B f(x)\,dx$$

следует, что интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Таким образом, *исследование на сходимость интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *можно заменить исследованием на сходимость интеграла* $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)\,dx$ *при любом* $a_1 > a$, *если только функция* $f(x)$ *удовлетворяет требованиям определения* (1).

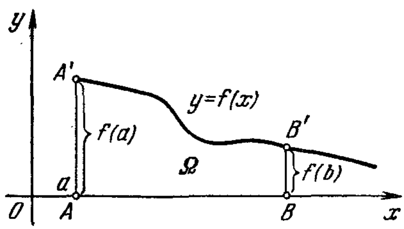

Рис. 9.1.

Несобственный интеграл (9.2) имеет простой геометрический смысл. Пусть $f(x)$ — непрерывная неотрицательная функция при $x \geqslant a$. Область Ω, примыкающая сверху к оси x, ограничена графиком этой функции, отрезком $a \leqslant x < +\infty$ оси x и отрезком ординаты $x = a$, $0 \leqslant y \leqslant f(a)$. Определения квадрируемости и площади области, сформулированные ранее (п. 3 § 1 гл. 1), к этой области неприменимы *). Проведя произвольную ординату $x = B > a$, $0 \leqslant y \leqslant f(B)$, мы отсечем квадрируемую криволинейную трапецию $ABB'A'$ (рис. 9.1), площадь которой выражается интегралом $\int\limits_a^B f(x)\,dx$. Естественно назвать область Ω квадрируемой, если площадь трапеции $ABB'A'$ стремится к конечному пределу, когда $B \to +\infty$, и этот предел площади трапеции $ABB'A'$ назвать площадью области Ω. Но тогда площадь области Ω будет выражаться несобственным интегралом (9.2).

*) В силу ее неограниченности.

Аналогично интегралу (9.2) определяется *несобственный интеграл*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{a} f(x)\,dx. \tag{9.3}$$

Если оба предела интегрирования бесконечны, то полагают по определению, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{9.4}$$

где a — произвольное конечное число, причем интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется с х о д я щ и м с я *тогда и только тогда, когда оба интеграла в правой части* (9.4) *сходятся.*

Легко показать, что сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ и его величина в случае, если он сходится, не зависят от выбора точки a *). Итак, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сводится к интегралам вида $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$

---

*) Можно определить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_{A}^{B} f(x)\,dx, \tag{9.4'}$$

где A и B стремятся к своим пределам независимо друг от друга. Действительно, в силу (9.4), (9.3) и (9.2), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{a} f(x)\,dx + \lim_{B\to+\infty} \int_{a}^{B} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_{A}^{B} f(x)\,dx,$$

причем для существования последнего предела при независимом стремлении $A\to-\infty$, $B\to+\infty$ необходимо и достаточно существование пределов

$$\lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{a} f(x)\,dx, \quad \lim_{B\to+\infty} \int_{a}^{B} f(x)\,dx.$$

и $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$. Но интеграл вида $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ простой заменой x на $-x$ сводится к интегралу вида $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, поэтому мы ограничимся в основном изучением интегралов вида $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_{0}^{B} \sin x\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty} (1-\cos B)$ расходится, так как $\cos B$ при $B\to+\infty$ не стремится ни к какому пределу, колеблясь между -1 и $+1$.

2. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, так как существует определенный конечный предел:

$$\lim_{\substack{B\to+\infty\\ A\to-\infty}} \int\limits_{A}^{B} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{B\to+\infty\\ A\to-\infty}} [\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

3. Особенно важным примером служит интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha}\,dx, \quad \text{где} \quad C>0 \quad \text{и} \quad a>0;$$

он сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$. Действительно,

$$\int\limits_{a}^{B} \frac{C}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} C\ln\frac{B}{a} & \text{при} \quad \alpha=1, \\ C\,\frac{B^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{при} \quad \alpha\neq 1, \end{cases}$$

поэтому

$$\lim_{B\to+\infty} \int\limits_{a}^{B} \frac{C}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} C\,\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{при} \quad \alpha>1, \\ +\infty & \text{при} \quad \alpha\leqslant 1. \end{cases}$$

Используя этот интеграл для сравнения, можно установить сходимость или расходимость многих других несобственных интегралов. (Подробнее об этом см. теорему 9.3, п. 4.)

2. Сведение несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ к числовой последовательности и числовому ряду. Исследование сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ может быть сведено к исследованию сходимости числовых последовательностей или числовых рядов.

Согласно определению 1, несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ является пределом функции $F(B)=\int\limits_a^{B} f(x)\,dx$ при $B\to+\infty$. Если применить к $F(B)$ определение предела функции через последовательности (см. вып. 1, гл. 4, § 2), мы придем к следующему критерию:

Для сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе последовательности точек*

$$B_n > a,\quad n=1,\ 2,\ \ldots;\quad B_n\to+\infty \quad \textit{при} \quad n\to\infty \tag{9.5}$$

последовательность чисел

$$\int\limits_a^{B_n} f(x)\,dx,\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{9.6}$$

сходилась к одному и тому же конечному пределу. В случае сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *предел последовательности* (9.6) *равен этому интегралу.*

Заметим, что последовательность (9.6) является последовательностью частичных сумм ряда

$$\int\limits_a^{B_1} f(x)\,dx+\int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx+\ \ldots\ +\int\limits_{B_{n-1}}^{B_n} f(x)\,dx+\ \ldots \tag{9.7}$$

В связи с этим высказанный выше критерий можно сформулировать иначе:

Для сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе последовательности точек*

(9.5) *числовой ряд* (9.7) *был сходящимся и его сумма не зависела от выбора последовательности точек* (9.5). *В случае сходимости интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сумма ряда* (9.7) *равна этому интегралу.*

Замечание 1. Если функция $f(x)$ знакопеременна на полупрямой $a \leqslant x < +\infty$, то из сходимости ряда (9.7) при каком-либо одном выборе последовательности точек (9.5) еще не вытекает, вообще говоря, сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Например, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$ расходится (см. пример 1 п. 1), хотя ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \sin x\,dx$ сходится, так как все его члены равны нулю.

Если функция $f(x)$ сохраняет знак при всех $x \geqslant a$, например $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \geqslant 0$ то для сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы ряд (9.7) *сходился хотя бы при каком-либо одном выборе монотонно возрастающей последовательности* (9.5) *).

Необходимость этого критерия вытекает из сказанного выше. Докажем его достаточность. Пусть $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \geqslant a$ и пусть ряд (9.7) сходится для некоторой монотонно возрастающей последовательности (9.5). Тогда последовательность частных сумм (9.6) этого ряда, в силу неотрицательности $f(x)$, будет монотонно возрастающей (неубывающей) и стремящейся к определенному конечному пределу J. Докажем, что при любом другом выборе последовательности

$$B'_m > a, \quad m = 1, 2, \ldots; \quad B'_m \to +\infty \text{ при } m \to +\infty \tag{9.5'}$$

соответствующий ряд

$$\int\limits_a^{B'_1} f(x)\,dx + \int\limits_{B'_1}^{B'_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{B'_m}^{B'_{m+1}} f(x)\,dx + \ldots \tag{9.7'}$$

также сходится и его сумма равна J.

*) Ср. с интегральным признаком сходимости числового ряда (вып. 1, гл. 13, § 2, п. 4).

При доказательстве мы будем оперировать с частными суммами рядов (9.7) и (9.7′). Пусть дано $\varepsilon > 0$; тогда найдется такое B_{n_0}, что будет выполняться неравенство

$$J - \varepsilon < \int_a^{B_{n_0}} f(x)\,dx < J.$$

Возьмем такое m_0, чтобы при всех $m \geqslant m_0$ было $B'_m \geqslant B_{n_0}$. Так как для любого B'_m найдется $B_{n_m} > B'_m$, то при всех $m \geqslant m_0$, в силу неотрицательности $f(x)$, будет выполняться неравенство

$$J - \varepsilon < \int_a^{B_{n_0}} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{B'_m} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{B_{n_m}} f(x)\,dx \leqslant J.$$

Следовательно, $\lim\limits_{m \to +\infty} \int_a^{B'_m} f(x)\,dx = J$, что и требовалось доказать.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 2^n & \text{при } n \leqslant x \leqslant n + \frac{1}{2^{2n}}, \\ 0 & \text{при } n + \frac{1}{2^{2n}} < x < n + 1. \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ сходится.

Замечание 2. Этот пример показывает, что из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ даже в случае неотрицательной функции $f(x)$ не следует, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

3. Критерий Коши для несобственных интегралов. Сходимость несобственного интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B \to +\infty} \int_a^{B} f(x)\,dx \tag{9.2}$$

означает существование определенного конечного предела у функции $F(B) = \int_a^B f(x)\,dx$ при $B \to +\infty$.

Согласно общему критерию Коши (см. вып. 1, гл. 8, § 1, п. 2), $F(B)$ стремится к определенному конечному пределу при $B \to +\infty$

в том и только том случае, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $B(\varepsilon)$, что $|F(B'') - F(B')| < \varepsilon$ при всех B' и $B'' > B(\varepsilon)$. Подставляя сюда выражение $F(B) = \int\limits_a^B f(x)\,dx$, получим следующий

Критерий Коши (*для интеграла*). *Для сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое $B(\varepsilon)$, что при всех B' и $B'' > B(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство*

$$\left| \int\limits_{B'}^{B''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon, \tag{9.8}$$

т. е. чтобы интеграл

$$\int\limits_{B'}^{B''} f(x)\,dx \tag{9.8'}$$

стремился к нулю при B' и $B'' \to +\infty$.

В некоторых случаях критерий Коши (9.8) можно применять непосредственно при исследовании на сходимость конкретных интегралов.

Пример. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ (полагая его подынтегральную функцию, для непрерывности, равной 1 при $x = 0$). Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int\limits_{B'}^{B''} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\cos B'}{B'} - \frac{\cos B''}{B''} - \int\limits_{B'}^{B''} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Поэтому

$$\left| \int\limits_{B'}^{B''} \frac{\sin x}{x}\,dx \right| \leqslant \frac{1}{B'} + \frac{1}{B''} + \left| \int\limits_{B'}^{B''} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{B'} + \frac{1}{B''} + \left| \int\limits_{B'}^{B''} \frac{dx}{x^2} \right| \leqslant \frac{2}{B'} + \frac{2}{B''} \to 0 \quad \text{при} \quad B' \text{ и } B'' \to +\infty.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Важнее, однако, применение критерия Коши не к исследованию отдельных конкретных интегралов, а к выводу практически более удобных общих достаточных признаков сходимости интегралов. Переходя к рассмотрению таких признаков, введем сначала понятие *абсолютной сходимости* интеграла, аналогичное понятию абсолютной сходимости числового ряда.

4. Абсолютная сходимость. Признаки абсолютной сходимости.

Определение 2. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема в обычном смысле на каждом конечном отрезке*) $a \leqslant x \leqslant B$, $a < B < +\infty$. Несобственный интеграл (9.2) называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{9.9}$$

Теорема 9.1. *Если интеграл (9.2) сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Действительно, из сходимости интеграла (9.10) вытекает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $B(\varepsilon)$, что $\left|\int_{B'}^{B''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$ при всех B' и $B'' > B(\varepsilon)$. Но всегда

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{B'}^{B''} |f(x)|\,dx\right|. \tag{9.10}$$

Поэтому будет

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{B'}^{B''} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{при всех } B' \text{ и } B'' > B(\varepsilon),$$

т. е. для интеграла (9.2) выполняется критерий Коши. Следовательно, интеграл (9.2) сходится. Теорема доказана.

Замечание 1. Из сходимости интеграла (9.2) его абсолютная сходимость не вытекает. Например, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится (см. п. 3), а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится. Чтобы доказать его расходимость, достаточно, согласно п. 2, доказать рас-

*) Из интегрируемости $f(x)$ в обычном смысле на конечном отрезке следует, как известно, интегрируемость $|f(x)|$ в обычном смысле на этом отрезке.

ходимость числового ряда $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{|\sin x|}{x}dx$, которая легко устанавливается с помощью признака сравнения числовых рядов. Мы имеем

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{|\sin x|}{x}dx \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\left|\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\sin x\,dx\right| = \frac{2}{(n+1)\pi} \quad \text{при } n \geqslant 1,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi n}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ расходится, так как он отличается лишь постоянным множителем $\frac{2}{\pi}$ от гармонического ряда *).

Замечание 2. Пусть $f(x)$ определена при $a \leqslant x < +\infty$ и интегрируема на каждом конечном интервале $a \leqslant x \leqslant B$. Тогда при любом $a_1 > a$ из абсолютной сходимости интеграла $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)\,dx$ следует абсолютная сходимость интеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, так как для сходимости любого из интегралов $\int_{a}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ и $\int_{a_1}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{B'}^{B''}|f(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad B' \text{ и } B'' \to +\infty.$$

При исследовании абсолютной сходимости несобственных интегралов обычно применяют признаки сравнения для интегралов.

Теорема 9.2. (***общий признак сравнения***). *Если при всех достаточно больших x*

$$|f(x)| \leqslant g(x), \tag{9.11}$$

---

*) Если интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а интеграл $\int_{a}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ расходится, то интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется условно сходящимся. Таким интегралам посвящен п. 5.

то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \tag{9.12}$$

следует абсолютная сходимость интеграла *)

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{9.13}$$

Доказательство. В силу выполнения критерия Коши для сходящегося интеграла (9.1) и в силу неравенства (9.11), для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $B(\varepsilon)$, что

$$\left|\int_{B'}^{B''} |f(x)|\,dx\right| \leqslant \left|\int_{B'}^{B''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{при всех } B',\ B'' > B(\varepsilon),$$

т. е. критерий Коши будет выполнен также и для интеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Следовательно, интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, а это и означает абсолютную сходимость интеграла (9.13). Признак доказан.

В примере 3 п. 1 мы установили, что при $a > 0$ и $C > 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{C\,dx}{x^\alpha} = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B \frac{C\,dx}{x^\alpha} = \begin{cases} C\dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{при } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда и из общего признака сравнения следует

Теорема 9.3 (***частный признак сравнения***). *Пусть дан несобственный интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *).

1. *Если при всех достаточно больших значениях* x, $|f(x)| < \dfrac{C}{x^\alpha}$, *где* $C \geqslant 0$ *и* $\alpha > 1$, *то данный интеграл сходится абсолютно.*

2. *Если же при всех достаточно больших значениях* x *функция* $f(x) \geqslant \dfrac{C}{x^\alpha}$ *или если при всех достаточно больших* x *функция* $f(x) \leqslant -\dfrac{C}{x^\alpha}$, *где* $C > 0$ *и* $\alpha \leqslant 1$, *то этот интеграл расходится.*

---

*) В теоремах 9.2, 9.3, 9.3′, 9.3″ и 9.3‴ мы предполагаем, что функция $f(x)$ интегрируема в обычном смысле на каждом конечном интервале $a \leqslant x \leqslant B$, $a < B < +\infty$.

Доказательство. 1) Полагая в общем признаке сравнения $g(x)=\frac{C}{x^\alpha}$ и учитывая, что при $\alpha>1$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx = C\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=C\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ (при $a>0$) *) сходится, получим, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно.

2) Пусть $f(x)\geqslant\frac{C}{x^\alpha}$, где $C>0$ и $\alpha\leqslant 1$ при всех $x\geqslant a_1>a$. Интегрируя в пределах от a_1 до B, получим, что $\int\limits_{a_1}^{B} f(x)\,dx\geqslant C\int\limits_{a_1}^{B}\frac{dx}{x^\alpha}\to+\infty$ при $B\to+\infty$, так как $\alpha\leqslant 1$, а следовательно, интеграл $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Но тогда расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Если же $f(x)\leqslant-\frac{C}{x^\alpha}$ при всех $x\geqslant a_1>a>0$, $C>0$ и $\alpha\leqslant 1$, то, полагая $f^*(x)=-f(x)$, получим $f^*(x)\geqslant\frac{C}{x^\alpha}$ при всех $x\geqslant a_1>a>0$, а следовательно, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f^*(x)\,dx$ расходится; вместе с ним расходится и интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^{B} f(x)\,dx=-\lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^{B} f^*(x)\,dx.$$

*) Мы предполагаем, что $a>0$, так как в противном случае можно заменить a через $a_1>0$, потому что из абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)\,dx$ следует абсолютная сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)\,dx$ — расходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Замечание 1. Пункт 2 теоремы 9.3 можно сформулировать в следующей эквивалентной форме: *если при всех достаточно больших значениях* $x\,(x \geqslant a)$ *функция* $f(x)$ *сохраняет знак и* $|f(x)| \geqslant \frac{C}{x^\alpha}$, *где* $C > 0$, $\alpha \leqslant 1$, *то интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

Замечание 2. Выполнение условия $|f(x)| \geqslant \frac{C}{x^\alpha}$, $C>0$, $\alpha\leqslant 1$, при всех достаточно больших $x \geqslant a$ является недостаточным для расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Интеграл может оказаться сходящимся за счет знакопеременности функции. Например, нетрудно показать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ от функции, определяемой соотношением $f(x) = (-1)^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}$, $n \leqslant x < n+1$, $n=1, 2, 3, \ldots$, где $0 < \alpha \leqslant 1$, сходится, хотя $|f(x)| = \frac{1}{x^\alpha}$, где $0 < \alpha \leqslant 1$.

Очевидно, признак сравнения с функцией $\frac{C}{x^\alpha}$ можно сформулировать иначе:

Теорема 9.3′ **(*модифицированный частный признак сравнения*).** *Пусть подынтегральная функция в интеграле* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *при всех достаточно больших* x *представима в виде* $f(x) = \frac{g(x)}{x^\alpha}$. *Тогда:* 1) *если* $g(x)$ *по модулю ограничена, а* $\alpha > 1$, *то этот интеграл сходится абсолютно,* 2) *если* $g(x)$ *сохраняет знак и* $|g(x)| \geqslant \mathrm{const} > 0$, *а* $\alpha < 1$, *то этот интеграл расходится.*

Иногда оказывается удобной следующая форма признака сравнения с функцией $\frac{C}{x^\alpha}$:

Теорема 9.3″ **(*частный признак сравнения в предельной форме*).** *Пусть существует предел* $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|\,x^\alpha = C$. *Тогда:* 1) *если* $0 \leqslant C < +\infty$, $\alpha > 1$, *то интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится абсолютно,* 2) *если же* $0 < C \leqslant +\infty$, $\alpha \leqslant 1$, *а* $f(x)$ *сохраняет знак при всех достаточно больших* x, *то этот интеграл расходится.*

Доказательство. 1) Если $0 \leqslant C < +\infty$, то при всех достаточно больших x

$$|f(x)|\,x^{\alpha} \leqslant 2C, \quad \text{т. е.} \quad |f(x)| \leqslant \frac{2C}{x^{\alpha}} \quad \text{при} \quad C > 0,$$

и

$$|f(x)|\,x^{\alpha} \leqslant 1, \quad \text{т. е.} \quad |f(x)| \leqslant \frac{1}{x^{\alpha}} \quad \text{при} \quad C = 0,$$

поэтому, в силу теоремы 9.3, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно.

2) Если $0 < C \leqslant +\infty$, $\alpha \leqslant 1$, то при всех достаточно больших x

$$|f(x)|\,x^{\alpha} > \frac{C}{2}, \quad \text{т. е.} \quad |f(x)| > \frac{C}{2x^{\alpha}} \quad \text{при} \quad C < +\infty,$$

и

$$|f(x)|\,x^{\alpha} > 1, \quad \text{т. е.} \quad |f(x)| > \frac{1}{x^{\alpha}} \quad \text{при} \quad C = +\infty,$$

поэтому, в силу замечания 1 к теореме 9.3′, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 9.3″ (частный признак сравнения в предельной форме) охватывает несколько более узкий класс функций, чем теорема 9.3′ (частный признак сравнения), поскольку в отличие от теоремы 9.3′ теорема 9.3″ предполагает существование конечного или бесконечного предела у $|f(x)|\,x^{\alpha}$ при $x \to +\infty$.

Из теоремы 9.3″ очевидным образом следует

Теорема 9.3‴ (частный признак сравнения в терминах порядков величин). *Пусть $|f(x)|$ является бесконечно малой величиной порядка $\frac{1}{x^{\alpha}}$ при $x \to +\infty$, тогда: 1) если $\alpha > 1$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, 2), если же $\alpha \leqslant 1$, а $f(x)$ сохраняет знак при всех достаточно больших x, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.*

Напомним, что $f(x)$ называется величиной такого же порядка малости, как и $\frac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$ при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| : \frac{1}{x^{\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} |f(x)|\,x^{\alpha} = C, \quad \text{где } 0 < C < +\infty.$$

Замечание 4. Теорема 9.3‴, очевидно, охватывает еще более узкий класс функций, чем теорема 9.3″, так как предполагает существование предела $|f(x)|x^\alpha$ при $x\to+\infty$, отличного от нуля и бесконечности.

Примеры. 1. Интеграл Пуассона $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ сходится, в силу теоремы 9.3, так как показательная функция e^{-x^2} убывает быстрее любой отрицательной степени x при $x\to+\infty$ и, следовательно, при всех достаточно больших x будет

$$e^{-x^2} < \frac{C}{x^2},$$

где $C=\mathrm{const}>0$ (здесь мы взяли $\alpha=2$, хотя могли бы взять α равным и любому другому числу >1). Этот интеграл сходится также и в силу теоремы 9.3″, так как

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x^2}=0 \quad (\alpha=2).$$

2. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$ сходится при всех вещественных значениях p, например, в силу теоремы 9.3″, поскольку при любых таких p

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}x^{p-1}=0.$$

3. Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$ при $n\geqslant 0$. Мы имеем

$$\frac{x^m}{1+x^n}=\frac{x^m}{x^n}\,\frac{1}{1+x^{-n}}=\frac{g(x)}{x^{n-m}},$$

где $\frac{1}{2}\leqslant g(x)\leqslant 1$ при $x\geqslant 1$. Следовательно, в силу теоремы 9.3′, интеграл сходится при $n-m>1$ и расходится при $n-m\leqslant 1$.

5. Условная сходимость.

Определение 3. *Интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{9.14}$$

называется условно сходящимся, если он сходится, в то время как интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \tag{9.15}$$

расходится.

Сходимость некоторых условно сходящихся интегралов позволяет установить признак Абеля.

Теорема 9.4 (признак Абеля). *Пусть $\varphi(x)$ непрерывна, а $g(x)$ непрерывно дифференцируема на полупрямой $a \leqslant x < +\infty$. Интеграл*

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) g(x) dx \tag{9.16}$$

заведомо сходится, если первообразная $\Phi(B) = \int_a^B \varphi(x) dx$ ограничена на полупрямой $a \leqslant B < +\infty$, а $g(x)$, монотонно убывая, стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий теоремы для интеграла (9.16) выполнен критерий Коши. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{B'}^{B''} \varphi(x) g(x) dx = \Phi(B'') g(B'') - \Phi(B') g(B') - \int_{B'}^{B''} \Phi(x) g'(x) dx.$$

В силу монотонного убывания $g(x)$ при $x \to +\infty$, $g'(x) \leqslant 0$, поэтому к последнему интегралу можно применить обобщенную теорему о среднем; это дает

$$\int_{B'}^{B''} \Phi(x) g'(x) dx = \Phi(\xi) \int_{B'}^{B''} g'(x) dx = \Phi(\xi) [g(B'') - g(B')],$$

где ξ заключено между B' и B''. Следовательно,

$$\int_{B'}^{B''} \varphi(x) g(x) dx = \Phi(B'') g(B'') - \Phi(B') g(B') - \Phi(\xi) [g(B'') - g(B')],$$

откуда, в силу ограниченности $\Phi(B)$ и стремления к нулю $g(B)$ при $B \to +\infty$, получаем

$$\int_{B'}^{B''} \varphi(x) g(x) dx \to 0 \quad \text{при} \quad B' \text{ и } B'' \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Примеры. 1. Интеграл $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, где $\alpha > 0$, сходится, так как, положив $\varphi(x) = \sin x$ и $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, будем иметь

$$|\Phi(x)| = \left|\int\limits_{\pi}^{x} \varphi(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{\pi}^{x} \sin x\,dx\right| = |\cos\pi - \cos x| \leqslant 2$$

при $\pi \leqslant x \leqslant +\infty$, а $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \to 0$, монотонно убывая, при $x \to +\infty$ и $\alpha > 0$.

Замечание. Сходимость этого интеграла можно доказать и не прибегая к признаку Абеля, а применяя критерий Коши и интегрирование по частям, как в конце п. 4.

2. Полагая в интеграле

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{(\ln x)\sin x}{x}\,dx,\ \varphi(x) = \sin x,\ g(x) = \frac{\ln x}{x},$$

замечаем, что он сходится по признаку Абеля.

3. Рассмотрим интеграл Френеля $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$, находящий применение в оптике. Полагая $x^2 = t$, получим

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

Последний интеграл сходится в силу признака Абеля.

6. Распространение методов вычисления интегралов на случай несобственных интегралов. При вычислении несобственных интегралов можно использовать замену переменных, интегрирование по частям, представление интеграла от суммы нескольких слагаемых в виде суммы интегралов от этих слагаемых, т. е. поступать так, как это делалось в случае собственных интегралов; соответствующие формулы будут иметь силу, если все входящие в них интегралы сходятся.

Поясним на примере смысл последней оговорки. Интеграл $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ сходится (например, в силу частного признака сравнения). Разлагая дробь на простейшие (см. вып. 1, гл. 7, § 7), имеем

$$\frac{1}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-1)}. \qquad (*)$$

Однако интегралы $\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{x+2}$ и $\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x-1}$ очевидным образом расходятся. Поэтому нельзя написать равенство

$$\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3}\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{3}\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x-1}.$$

Чтобы воспользоваться разложением (*) для вычисления рассматриваемого интеграла, проинтегрируем (*) от 0 до A и преобразуем после этого правую часть равенства:

$$\int\limits_3^{A}\frac{dx}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3}\int\limits_3^{A}\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{3}\int\limits_3^{A}\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{3}\ln\left[\frac{5}{2}\,\frac{A-1}{A+2}\right].$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $A\to+\infty$, получим

$$\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}.$$

§ 2. Интегралы от неограниченных функций с конечными и бесконечными пределами интегрирования

Остановимся сначала на интегралах с конечными пределами интегрирования. Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ всюду, кроме, быть может, конечного числа точек. Точку $x_0\in[a, b]$ мы будем называть *особой* для $f(x)$, если $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$ в любой окрестности точки x_0. Например, для функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{при } 0<x\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

точка $x=0$ является особой (рис. 9.2).

Для функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } 0<x\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$