ния). Разлагая дробь на простейшие (см. вып. 1, гл. 7, § 7), имеем

$$\frac{1}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-1)}. \qquad (*)$$

Однако интегралы $\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{x+2}$ и $\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x-1}$ очевидным образом расходятся. Поэтому нельзя написать равенство

$$\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3}\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{3}\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x-1}.$$

Чтобы воспользоваться разложением (*) для вычисления рассматриваемого интеграла, проинтегрируем (*) от 0 до A и преобразуем после этого правую часть равенства:

$$\int\limits_3^{A}\frac{dx}{x^2+x-2}=-\frac{1}{3}\int\limits_3^{A}\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{3}\int\limits_3^{A}\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{3}\ln\left[\frac{5}{2}\,\frac{A-1}{A+2}\right].$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $A\to+\infty$, получим

$$\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}.$$

§ 2. Интегралы от неограниченных функций с конечными и бесконечными пределами интегрирования

Остановимся сначала на интегралах с конечными пределами интегрирования. Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ всюду, кроме, быть может, конечного числа точек. Точку $x_0\in[a,b]$ мы будем называть *особой* для $f(x)$, если $f(x)$ не ограничена на $[a,b]$ в любой окрестности точки x_0. Например, для функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{при } 0<x\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

точка $x=0$ является особой (рис. 9.2).

Для функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } 0<x\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

точка $x=0$ также является особой (рис. 9.3). Заметим, что в этом примере $f(x)$ не стремится к бесконечности при $x \to 0$, так как в сколь угодно малой окрестности точки $x=0$ эта функция бесконечное число раз обращается в нуль.

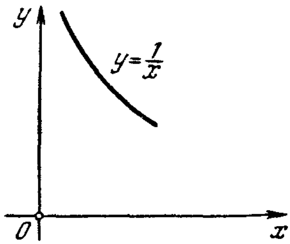

Рис. 9.2.

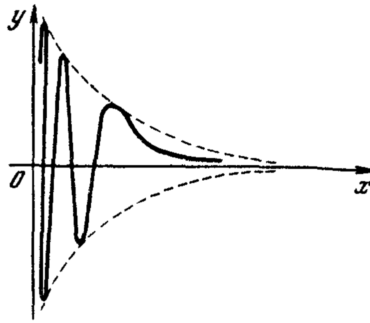

Рис. 9.3.

Определение. *Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ всюду, кроме,* ~~*может быть, конечного*~~ *числа точек. Если $x=b$ является для $f(x)$ особой точкой и если интеграл $\int\limits_a^{b-\mu} f(x)\,dx$ существует при каждом μ, $0<\mu<b-a$, то несобственным интегралом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется предел*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu \to +0} \int\limits_a^{b-\mu} f(x)\,dx. \tag{9.17}$$

Если этот предел существует и конечен, то интеграл (9.17) называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл в случаях, когда особой точкой для $f(x)$ является:

левый конец $x=a$ интервала интегрирования $[a, b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to +0} \int\limits_{a+\lambda}^b f(x)\,dx, \tag{9.18}$$

или оба конца $x=a$ и $x=b$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\lambda \to +0 \\ \mu \to +0}} \int\limits_{a+\lambda}^{b-\mu} f(x)\,dx, \tag{9.19}$$

или внутренняя точка $x=c$, $a<c<b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\lambda\to+0\\ \mu\to+0}}\left[\int_a^{c-\mu} f(x)dx+\int_{c+\lambda}^b f(x)\,dx\right]. \qquad (9.20)$$

Остановимся теперь на условиях сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций. Применяя критерий Коши к функции

$$F(\mu)=\int_a^{b-\mu} f(x)\,dx \qquad (9.21)$$

при $\mu\to+0$, получим

Критерий Коши (для несобственного интеграла (9.17)). *Для сходимости интеграла* (9.17) ***необходимо*** *и* ***достаточно,*** ***чтобы*** *для всякого* $\varepsilon>0$ ***существовало*** *такое* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, ***что***

$$\left|\int_{b-\mu'}^{b-\mu''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon \quad \text{\textit{при всех}} \quad 0<\mu',\ \mu''<\delta(\varepsilon).$$

Аналогично может быть сформулирован критерий Коши для интегралов (9.18) — (9.20). Можно доказать, что для сходимости интегралов (9.19) и (9.20) необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы $\int_a^c f(x)\,dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, причем в случае (9.19) точку $x=c$, $a<c<b$, можно выбирать произвольно. В случае сходимости для интегралов (9.19) и (9.20) имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \qquad (9.22)$$

Аналогично можно поступить в случае любого конечного числа особых точек на интервале интегрирования $[a, b]$; интервал $[a, b]$ следует так разбить на конечное число интервалов, чтобы на каждом частичном интервале функция $f(x)$ имела особую точку лишь в одном из его концов.

Таким образом, общий случай сводится к интегралам вида (9.17) и (9.18); но интеграл вида (9.18) простой заменой x на $-x$ сводится к интегралу вида (9.17). Поэтому мы ограничимся в основном рассмотрением интегралов вида (9.17).

Абсолютная и условная сходимости определяются, как и в случае интегралов с бесконечными пределами интегрирования. С помощью критерия Коши можно доказать, что из абсолютной сходимости следует сходимость, а также установить следующий

Общий признак сравнения. *Если b — единственная особая точка $f(x)$ на $[a, b]$ и $|f(x)| \leqslant g(x)$ при всех $x \in [a, b)$, достаточно близких к b, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ вытекает абсолютная сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*

Остановимся теперь на частном признаке сравнения с функцией $\dfrac{C}{(b-x)^\alpha}$, аналогичном теореме 9.3.

Частный признак сравнения. *Пусть функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, имеет особую точку в конце $x = b$ и интеграл $\int\limits_a^{b-\mu} f(x)\,dx$ существует при каждом μ, $0 < \mu < b - a$. Тогда:*

1) *если при всех $x \in [a, b)$, достаточно близких к b,*

$$|f(x)| \leqslant \frac{C}{(b-x)^\alpha}, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant C < +\infty, \quad \alpha < 1, \tag{9.23}$$

то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно;

2) *если же при всех $x \in [a, b)$, достаточно близких к b,*

$$f(x) > \frac{C}{(b-x)^\alpha}, \quad \text{где} \quad C > 0, \quad \alpha \geqslant 1, \tag{9.24}$$

либо при всех $x \in [a, b)$, достаточно близких к b,

$$f(x) < -\frac{C}{(b-x)^\alpha}, \quad \text{где} \quad C > 0, \quad \alpha \geqslant 1, \tag{9.24'}$$

то этот интеграл расходится.

Доказательство. 1) В этом случае имеем

$$\left|\int\limits_{b-\mu'}^{b-\mu''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b-\mu'}^{b-\mu''} |f(x)|\,dx\right| \leqslant C\left|\int\limits_{b-\mu'}^{b-\mu''} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\right| =$$

$$= C\left|\frac{(\mu')^{1-\alpha} - (\mu'')^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right| \to 0$$

при $\alpha < 1$ и μ', $\mu'' \to 0$. Следовательно, интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ сходятся.

2) Предполагая $f(x)$ неотрицательной*), будем иметь

$$f(x) > \frac{C}{(b-x)^\alpha} \text{ при } a < a_1 \leqslant x < b,$$

$$\int_{a_1}^{b-\mu} f(x)\,dx > \int_{a_1}^{b-\mu} \frac{C}{(b-x)^\alpha}\,dx \to +\infty \quad \text{при} \quad \mu \to 0+0 \text{ и } \alpha \geqslant 1,$$

так как

$$\int_{a_1}^{b-\mu} \frac{C}{(b-x)^\alpha}\,dx = \begin{cases} C\left[\dfrac{\mu^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{(b-a_1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] & \text{при} \quad \alpha > 1, \\ C \ln \dfrac{b-a_1}{\mu} & \text{при} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл $\int_{a_1}^{b} f(x)\,dx$, а с ним и интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, расходится.

Замечание. Пункт 2) доказанного признака можно сформулировать в следующей эквивалентной форме: *если при всех x, достаточно близких к b, $|f(x)| \geqslant \frac{C}{x^\alpha}$, где $C > 0$, $\alpha \geqslant 1$, причем $f(x)$ при указанных x сохраняет знак, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится.*

Простой перефразировкой из доказанного частного признака сравнения получается

Модифицированный частный признак сравнения. *Пусть функция $f(x)$, интегрируемая в обычном смысле на каждом отрезке $a \leqslant x \leqslant b-\lambda$, где $0 < \lambda < b-a$, может быть представлена в окрестности b (т. е. при $b-\lambda < x < b$) в виде $f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^\alpha}$. Тогда:*

1) *если $g(x)$ ограничена по модулю, а $\alpha < 1$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно;*

---

*) Если $f(x)$ неположительна, то делаем замену $f^*(x) = -f(x)$, где $f^*(x)$ уже неотрицательна; из расходимости $\int_a^b f^*(x)\,dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f^*(x)\,dx$.

2) *если* $g(x)$ *сохраняет знак в окрестности* b, $|g(x)| \geqslant \geqslant \text{const} > 0$, *а* $\alpha \geqslant 1$, *то этот интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится.*

Аналогично формулируется модифицированный частный признак сравнения в случае, когда единственной особой точкой $f(x)$ на $[a, b]$ является конец $x = a$.

Нетрудно также сформулировать и доказать частный признак сравнения в предельной форме, что мы предоставляем сделать читателю.

Напомним, что $|f(x)|$ называется величиной такого же порядка, что и $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ при $x \to b - 0$, если

$$\lim_{x \to b-0} |f(x)| : \frac{1}{(b-x)^\alpha} = \lim_{x \to b-0} (b-x)^\alpha |f(x)| = C, \text{ где } 0 < C < +\infty,$$

и сформулируем

Частный признак сравнения в терминах порядков величин. *Пусть* $|f(x)|$ *при* $x \to b - 0$ *) *является бесконечно большой величиной порядка* $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ $(\alpha > 0)$; *тогда:*

1) *если* $\alpha < 1$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится абсолютно*;

2) *если же* $\alpha \geqslant 1$, *а* $f(x)$ *сохраняет знак в окрестности* $x = b$ (*т. е. при* $b - \lambda < x < b$, $0 < \lambda < b - a$), *то этот интеграл расходится.*

Аналогично формулируется этот признак, когда $f(x)$ имеет особую точку не в конце $x = b$, а в конце $x = a$ отрезка $[a, b]$.

Примеры. 1. Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ сходится, так как

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \frac{1}{(1+x+x^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}} g(x),$$

где $g(x) = \frac{1}{(1+x+x^2)^{1/2}}$ — ограниченная функция. Здесь $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

*) Мы предполагаем функцию $f(x)$ интегрируемой в обычном смысле на каждом отрезке $a \leqslant x \leqslant b - \lambda$, $0 < \lambda < b - a$.

2. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,dx$. Мы имеем

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^p}=\frac{1}{x^{p-1}}\,\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x^{p-1}}\,g(x),\quad \text{где}\quad g(x)=\frac{\sin x}{x}\text{ — функ-}$$

ция, ограниченная по модулю, причем $\sin x \leqslant g(x) \leqslant 1$. Здесь $a=0$, $b=1$, $\alpha=p-1$. Поэтому при $\alpha=p-1<1$ интеграл сходится, а при $\alpha=p-1\geqslant 1$ он расходится. Таким образом, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ сходится при $p<2$ и расходится при $p\geqslant 2$.

Признак Абеля для несобственных интегралов с конечными пределами интегрирования мы предоставляем сформулировать и доказать читателю по аналогии с признаком Абеля для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования (см. п. 5 § 1).

Наконец, по поводу замены переменных, интегрирования по частям и разложения на слагаемые несобственных интегралов с конечными пределами интегрирования можно сказать то же самое, что говорилось об этих операциях для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования (см. п. 6 § 1).

Остановимся теперь вкратце на интегралах с бесконечными пределами интегрирования от неограниченных функций с конечным числом особых точек. Если несобственный интеграл берется по полупрямой $a\leqslant x<+\infty$ $(-\infty<x\leqslant a)$ или по всей оси $-\infty<x<+\infty$, то, разбивая область интегрирования одной или двумя точками деления на один конечный интервал, содержащий все особые точки подынтегральной функции $f(x)$, и на один или два полубесконечных интервала без особых точек $f(x)$, сводят общий несобственный интеграл к рассмотренным выше частным случаям. При этом исходный интеграл полагают равным по определению сумме интегралов по частичным интервалам, на которые разбита первоначальная область интегрирования.

Исходный интеграл называют *сходящимся* тогда и только тогда, когда *все* интегралы по упомянутым частичным интервалам сходятся, и *расходящимся*, если хоть *один* из них расходится.

Можно показать, что это определение сходимости исходного интеграла и численная величина интеграла в случае его сходимости не зависят от выбора точек деления.

Примеры. 3. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx$. Если $p-1<0$, то подынтегральная функция имеет особую точку $x=0$. Поэтому разбиваем интервал интегрирования точкой $x=1$ на два: $[0, 1]$ и $(1, +\infty)$;

мы имеем

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx = \int_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx.$$

Интеграл $\int_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{1-p}}\,dx$ сходится при $1-p<1$, т. е. при $p>0$, и расходится при $p\leqslant 0$. Интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx$, как было установлено ранее (п. 4 § 1), сходится при всех значениях p, $-\infty<p<+\infty$, следовательно, интеграл *) $\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx$ сходится при всех $p>0$ и расходится при всех $p\leqslant 0$.

4. $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$. Сделаем замену переменных: $\ln\frac{1}{x}=t$, $\frac{1}{x}=e^t$, $x=e^{-t}$, $dx=-e^{-t}\,dt$. Тогда

$$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx = -\int_{+\infty}^0 e^{-pt}t^q e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} t^q e^{-(p+1)t}\,dt.$$

При $q<0$ подынтегральная функция имеет особую точку $x=0$. Поэтому разбиваем интеграл на два:

$$\int_0^{+\infty} t^q e^{-(p+1)t}\,dt = \int_0^1 e^{-(p+1)t}t^q\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-(p+1)t}t^q\,dt.$$

Интеграл $\int_0^1 e^{-(p+1)t}t^q\,dt = \int_0^1 \frac{e^{-(p+1)t}}{t^{-q}}\,dt$ сходится только при $-q<1$, т. е. только при $q>-1$, независимо от значений, принимаемых p. Интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-(p+1)t}t^q\,dt$ при $q>-1$ сходится только при $p+1>0$,

---

*) Этот интеграл называется гамма-функцией Эйлера и обозначается символом $\Gamma(p)$, т. е. $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx$.

т. е. только при $p > -1$. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx$ сходится только при $p > -1$ и $q > -1$.

5. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$. Делаем замену $\ln \ln x = t$. Получаем, что при $p > 1$ интеграл сходится только при $r < 1$ и любых q; при $p = 1$ он сходится только при $r < 1$ и $q > 1$; если $p < 1$, то он расходится при любых r и q.

1 — ?

§ 3. Главное значение расходящегося интеграла

Пусть $f(x)$ интегрируема в обычном смысле на каждом конечном отрезке оси x. Если не существует $\lim\limits_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int\limits_A^B f(x)\, dx$ при независимом стремлении A и B к их пределам, т. е. интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ расходится, но существует $\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx$, то этот предел называют *главным значением расходящегося интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ и пишут

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx \tag{9.25}$$

(V.p. — начальные буквы французских слов «Valeur principal», означающих «главное значение»).

Пусть теперь $f(x)$ имеет единственную особую точку c, $a < c < b$, на отрезке $[a, b]$ и пусть интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0+0 \\ \mu \to 0+0}} \left\{ \int\limits_a^{c-\lambda} f(x)\, dx + \int\limits_{c+\mu}^{b} f(x)\, dx \right\}$$

расходится, т. е. предел фигурной скобки при независимом стремлении λ и μ к $0+0$ не существует. Тогда, если предел этой скобки существует при $\lambda = \mu \to 0+0$, то его называют главным