т. е. только при $p > -1$. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx$ **сходится только** при $p > -1$ и $q > -1$.

5. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$. Делаем замену $\ln \ln x = t$. Получаем, что при $p > 1$ интеграл сходится только при $r < 1$ и любых q; при $p = 1$ он сходится только при $r < 1$ и $q >$ [illegible]; если $p < 1$, то он расходится при любых r и q.

1 — ?

§ 3. Главное значение расходящегося интеграла

Пусть $f(x)$ интегрируема в обычном смысле на каждом конечном отрезке оси x. Если не существует $\lim\limits_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int\limits_A^B f(x)\,dx$ при **независимом** стремлении A и B к их пределам, т. е. интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, но существует $\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$, то этот предел называют *главным значением расходящегося интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ и пишут

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx \tag{9.25}$$

(V.p. — начальные буквы французских слов «Valeur principal», означающих «главное значение»).

Пусть теперь $f(x)$ имеет единственную особую точку c, $a < c < b$, на отрезке $[a, b]$ и пусть интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0+0 \\ \mu \to 0+0}} \left\{ \int\limits_a^{c-\lambda} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\mu}^{b} f(x)\,dx \right\}$$

расходится, т. е. предел фигурной скобки при независимом стремлении λ и μ к $0+0$ не существует. Тогда, если предел этой скобки существует при $\lambda = \mu \to 0+0$, то его называют главным значением расходящегося интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ и пишут

$$\text{V.p.} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0+0} \left\{ \int\limits_a^{c-\lambda} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\lambda}^b f(x)\,dx \right\}. \quad (9.26)$$

Примеры. 1. Если $f(x)$ — нечетная функция*), то всегда существует

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx = 0.$$

2. Если $f(x)$ — четная функция*), то

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^A f(x)\,dx = 2\int\limits_{-A}^{0} f(x)\,dx.$$

Поэтому, если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ от четной функции расходится, т. е. хоть один из интегралов $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и главное значение V.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ также не существует.

3. Применяя главные значения расходящихся интегралов, вычислим интеграл

$$2J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx, \quad \text{где } m \text{ и } n \text{ — целые, } 0 < m < n, \quad (2.27)$$

играющий важную роль в теории эйлеровых интегралов (см. § 3 гл. 10). Так как

$$\left|\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\right| < \frac{C}{x^2} \quad \text{при } x\to\pm\infty, \text{ где } C = \text{const},$$

и так как все корни уравнения $1+x^{2n}=0$, $x_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = a_k + ib_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, не являются вещественными, то подынтегральная функция не имеет особых точек на оси x

*) См. п. 8 § 1 гл. 11.

и интеграл сходится. Разлагая дробь $\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ на простейшие и интегрируя в пределах от $-l$ до l, получим *)

$$\int_{-l}^{l} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \int_{-l}^{l} \frac{dx}{x-x_k} = \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \int_{-l}^{l} \frac{dx}{(x-a_k)-ib_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \left\{ \int_{-l}^{l} \frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}\,dx + i \int_{-l}^{l} \frac{b_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}\,dx \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \left\{ \ln \frac{(l-a_k)^2+b_k^2}{(l+a_k)^2+b_k^2} + i \left[\operatorname{arctg} \frac{l-a_k}{b_k} + \operatorname{arctg} \frac{l+a_k}{b_k} \right] \right\},$$

где $A_k = \frac{x_k^{2m}}{2nx_k^{2n-1}} = -\frac{1}{2n} x_k^{2m+1}$, так как $x_k^{2n} = -1$. Переходя к пределу при $l \to +\infty$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \sum_{k=0}^{2n-1} \pm \pi i A_k,$$

где знак плюс соответствует $b_k > 0$, а минус соответствует $b_k < 0$. Интегралы

$$A_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-x_k} = A_k \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a_k)\,dx}{(x-a_k)^2+b_k^2} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_k\,dx}{(x-a_k)^2+b_k^2} \right\}$$

являются, очевидно, расходящимися, а числа $\pm \pi i A_k = \lim\limits_{l \to +\infty} \int_{-l}^{l} \frac{dx}{x-x_k}$ являются их главными значениями.

Заметив, что $b_k > 0$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $b_k < 0$ при $k = n, n+1, \ldots, 2n-1$, можно написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \pi i \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} A_k - \sum_{k=n}^{2n-1} A_k \right\}, \tag{A}$$

*) Интеграл от комплексной функции $u(x) + iv(x)$ вещественной переменной x, где $u(x)$ и $v(x)$ вещественны, по определению равен $\int [u(x) + iv(x)]\,dx = \int u(x)\,dx + i \int v(x)\,dx$.

где

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k^{2m+1} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{(2m+1)(2k+1)}{2n}\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2n}\,\frac{e^{i\frac{(2m+1)}{2n}\pi} - e^{i\frac{(2m+1)(2n+1)}{2n}\pi}}{1-e^{i2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = -\frac{1}{n}\,\frac{e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i2\frac{2m+1}{2n}\pi}}, \qquad (\text{Б})$$

так как $e^{i(2m+1)\pi} = -1$. Далее, полагая $k = k' + n$, получим

$$\sum_{k=n}^{2n-1} A_k = -\frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} x_k^{2m+1} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} e^{i\frac{(2m+1)(2k+1)}{2n}\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2n}\sum_{k'=0}^{n-1} e^{i\frac{(2m+1)(2k'+1)}{2n}}\,e^{i(2m+1)\pi} = \frac{1}{2n}\sum_{k'=0}^{n-1} e^{i\frac{(2m+1)(2k'+1)}{2n}}, \qquad (\text{В})$$

а эта сумма лишь знаком отличается от суммы (Б).

Из (А) с помощью (Б) и (В) получаем

$$2J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = -\frac{2\pi i}{n}\,\frac{e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1-e^{i2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = \frac{\pi}{n}\,\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

В силу четности подынтегральной функции (см. сноску на стр. 384), отсюда находим, что

$$J = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n}\,\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}. \qquad (2.27')$$

4. Интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{\lambda\to 0+0\\ \mu\to 0+0}} \left\{ \int_a^{c-\lambda} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\mu}^{b} \frac{dx}{x-c} \right\} =$$

$$= \ln\frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\lambda\to 0+0\\ \mu\to 0+0}} \ln\frac{\lambda}{\mu},$$

где $a < c < b$, расходится. Однако если при переходе к пределу считать, что $\lambda = \mu$, то мы получим, что данный интеграл имеет главное значение:

$$\text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$