§ 4. Несобственные кратные интегралы

Сначала мы рассмотрим случай, когда подынтегральная функция не ограничена, а область интегрирования ограничена, а затем случай, когда область интегрирования не ограничена. Все рассуждения мы будем вести для двойных интегралов; тройные и N-кратные интегралы рассматриваются аналогично.

1. Интеграл от неограниченной функции по ограниченной области. Пусть в ограниченной области Ω на плоскости xy задана функция $f(M)=f(x, y)$, неограниченная в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)\in\overline{\Omega}$, и пусть, какова бы ни была область ω_δ, содержащая внутри себя точку M_0, в области $\Omega-\omega_\delta$ (заштрихованной на

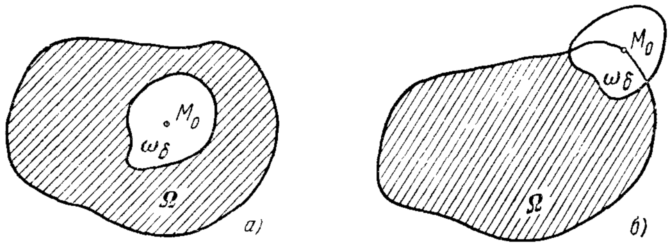

Рис. 9.4.

рис. 9.4, *а* и *б*) функция $f(M)=f(x, y)$ ограничена и интегрируема в обычном смысле, т. е. интеграл $\iint\limits_{\Omega-\omega_\delta} f(M)\,d\omega$ существует как предел интегральной суммы (см. определение 1, § 2, гл. 1) *). Индексом δ обозначен диаметр области ω_δ. При $\delta\to 0$ область ω_δ стягивается к точке M_0.

Определение 1. *Несобственным интегралом от функции $f(M)=f(x, y)$ по области Ω называется предел*

$$\lim_{\delta\to 0}\iint\limits_{\Omega-\omega_\delta} f(M)\,d\omega=\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\omega. \tag{9.28}$$

*) Области Ω и ω_δ, как и все другие, рассматриваемые в этом параграфе, предполагаем квадрируемыми; символом $\overline{\Omega}$ обозначается замкнутая область, т. е. область Ω с присоединенной к ней границей. Точка M_0 может лежать внутри Ω или на границе, но она обязана лежать внутри ω_δ; под $\Omega-\omega_\delta$ понимается множество всех точек, принадлежащих Ω и не принадлежащих ω_δ если Ω и ω_δ квадрируемы, то $\Omega-\omega_\delta$ квадрируема.

Если этот предел существует, конечен и не зависит от способа стягивания ω_δ к точке M_0, то несобственный интеграл (9.28) ***называется сходящимся**; в противном случае он **называется расходящимся**.*

Мы говорим, что при $\delta \to 0$ интеграл $\iint\limits_{\Omega-\omega_\delta} f(M)\,d\omega$ стремится к определенному конечному пределу J, не зависящему от способа стягивания области ω_δ к точке M_0, если, какова бы ни была последовательность областей

$$\omega_{\delta_1},\ \omega_{\delta_2},\ \ldots,\ \omega_{\delta_n},\ \ldots, \tag{9.29}$$

каждая из которых содержит точку M_0 внутри себя и диаметры которых удовлетворяют условию

$$\delta_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty\ ^{*)}, \tag{9.30}$$

соответствующая последовательность чисел

$$\iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_1}} f(M)\,d\omega,\quad \iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_2}} f(M)\,d\omega,\ \ldots,\ \iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}} f(M)\,d\omega,\ \ldots \tag{9.31}$$

сходится к одному и тому же пределу J, не зависящему от выбора последовательности (9.29).

Замечание 1. В то время как для однократного интеграла (т. е. при $N=1$) в качестве $\Omega-\delta_n$ брались интервалы $[a, b-\lambda]$ (см. определение и формулу (9.17)), т. е. обязательно связные области, при $N \geqslant 2$ области $\Omega-\omega_{\delta_n}$ и ω_{δ_n} не предполагаются связными.

Определение 2.** Пусть точка M_0 лежит внутри Ω. Если интеграл* (9.28) ***расходится**, но последовательность* (9.31) *стремится к одному и тому же пределу каждый раз, когда в качестве* (9.29) *берется стягивающаяся последовательность кругов с центром в M_0, то этот предел называется **главным значением расходящегося интеграла (9.28)**).

Главное значение расходящегося двойного (и тройного) интеграла находит применение в математической физике.

Замечание 2. Если точка M_0 лежит внутри Ω, то исследование на сходимость интеграла $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\omega$ можно заменить иссле-

*) Здесь не предполагается, что последовательность (9.29) стягивается монотонно, т. е. что $\omega_{\delta_1} \supset \omega_{\delta_2} \supset \ldots \supset \omega_{\delta_n} \supset \ldots$; предполагается только выполнение условия (9.30).

**) При определении главного значения расходящегося N-кратного интеграла вместо стягивающихся последовательностей кругов берутся стягивающиеся последовательности N-мерных шаров.

дованием на сходимость интеграла $\iint\limits_{\Omega'} f(M)\,d\omega$ по любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, содержащей внутри себя точку M_0 (ср. с замечанием на стр. 359, § 1). В том случае, когда особая точка M_0 принадлежит границе Ω, в качестве Ω' можно взять подобласть, являющуюся пересечением с областью Ω какой угодно области Ω^*, содержащей M_0 внутри себя.

Замечание 3. Случай, когда $f(M)$ имеет произвольное конечное число особых точек, принадлежащих области Ω или ее границе, сводится к случаю, рассмотренному в определении 1, с помощью надлежащего разбиения области Ω на части, аналогично тому, как это делалось для однократных несобственных интегралов.

2. Интегралы от неотрицательных функций. Интегралы от неотрицательных функций мы рассмотрим в первую очередь, поскольку их исследование проще и сами они могут быть использованы при исследовании интегралов от знакопеременных функций.

Теорема 9.5. *Пусть подынтегральная функция $f(M) = f(x, y)$ в интеграле* (9.28) *является неотрицательной и пусть в качестве стягивающейся последовательности* (9.29) *взята какая-либо монотонно стягивающаяся последовательность кругов с центрами в точке M_0, т. е. такая, что*

$$K_{\delta_1'} \supset K_{\delta_2'} \supset \ldots \supset K_{\delta_n'} \supset \ldots, \quad \delta_n' \to 0 \text{ при } n \to +\infty. \tag{9.29'}$$

Тогда для сходимости интеграла (9.28) *необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность чисел*

$$\iint\limits_{\Omega - K_{\delta_1'}} f(M)\,d\omega, \quad \iint\limits_{\Omega - K_{\delta_2'}} f(M)\,d\omega, \ \ldots, \ \iint\limits_{\Omega - K_{\delta_n'}} f(M)\,d\omega, \ \ldots \tag{9.31'}$$

была ограниченной.

Доказательство. Необходимость условия вытекает непосредственно из определения сходимости интеграла (9.28): если интеграл (9.28) сходится, то последовательность (9.31′) сходится и, следовательно, она ограничена.

Достаточность. Пусть последовательность (9.31′) ограничена. Так как последовательность (9.29′) является монотонно стягивающейся, то последовательность областей интегрирования у интегралов (9.31′) является монотонно расширяющейся, т. е. имеют место включения

$$\Omega - K_{\delta_1'} \subset \Omega - K_{\delta_2'} \subset \ldots \subset \Omega - K_{\delta_n'} \subset \ldots$$

Тогда, в силу неотрицательности подынтегральной функции $f(M) = f(x, y)$, последовательность чисел (9.31′) будет неубывающей.

Но, в силу ограниченности, она будет сходиться к определенному конечному пределу J:

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{\Omega - K_{\delta_n}'} f(M)\,d\omega = J, \tag{9.32}$$

причем $\iint\limits_{\Omega-K_{\delta_n}'} f(M)\,d\omega \leqslant J$. Для завершения доказательства теоремы нужно установить, что и при любом другом выборе стягивающейся последовательности областей (9.29) соответствующая последовательность чисел (9.31) будет сходиться к тому же пределу J. Чтобы это установить, заметим, что при любом достаточно большом n для области ω_{δ_n} можно найти такие круги K_{δ_p}' и K_{δ_q}' из последовательности (9.29′), чтобы имело место включение

$$K_{\delta_p}' \supset \omega_{\delta_n} \supset K_{\delta_q}' \tag{9.33}$$

и чтобы радиусы δ_p' и δ_q' этих кругов стремились к нулю при $\delta_n \to 0$. Из включения (9.33) вытекает включение

$$\Omega - K_{\delta_p}' \subset \Omega - \omega_{\delta_n} \subset \Omega - K_{\delta_q}', \tag{9.34}$$

из которого, в силу неотрицательности функции, вытекает неравенство

$$\iint\limits_{\Omega-K_{\delta_p}'} f(M)\,d\omega \leqslant \iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}} f(M)\,d\omega \leqslant \iint\limits_{\Omega-K_{\delta_p}'} f(M)\,d\omega; \tag{9.35}$$

но

$$\lim_{\delta_p'\to 0} \iint\limits_{\Omega-K_{\delta_p}'} f(M)\,d\omega = \lim_{\delta_q'\to 0} \iint\limits_{\Omega-K_{\delta_q}'} f(M)\,d\omega = J,$$

следовательно, из (9.35) вытекает, что

$$\lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}} f(M)\,d\omega = J,$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 9.5 непосредственно следует более общая

Теорема 9.6. *Пусть подынтегральная функция* $f(M) = f(x, y)$ *в интеграле* (9.28) *является неотрицательной и пусть в качестве* (9.29) *взята произвольная стягивающаяся последовательность областей* (см. сноску на стр. 388). *Тогда для* *сходимости интеграла* (9.28) *необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность чисел* (9.31) *была ограниченной.*

Доказательство. Необходимость устанавливается так же, как в доказательстве предыдущей теоремы. Для доказательства достаточности возьмем какую-либо монотонно стягивающуюся последовательность кругов (9.29′) и докажем, что соответствующая последовательность чисел (9.31′) будет ограниченной, если ограничена последовательность (9.31). А тогда по теореме 9.5 интеграл (9.28) будет сходящимся. Ограниченность последовательности чисел (9.31′) устанавливается следующим образом: пусть

$$\iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_m}} f(M)\,d\omega \leqslant C = \text{const} < +\infty \tag{9.36}$$

при всех $m = 1, 2, 3, \ldots$ Так как $\delta_m \to 0$ при $m \to +\infty$, то, каково бы ни было n, найдется такое m, что будет иметь место включение

$$K_{\delta'_n} \supset \omega_{\delta_m}, \tag{9.37}$$

из которого следует включение

$$\Omega - K_{\delta'_n} \subset \Omega - \omega_{\delta_m}. \tag{9.38}$$

Поэтому, в силу неотрицательности $f(M) = f(x, y)$, будет выполняться неравенство

$$\iint\limits_{\Omega-K_{\delta'_n}} f(M)\,d\omega \leqslant \iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_m}} f(M)\,d\omega. \tag{9.39}$$

Сопоставляя его с (9.36), получаем, что при всех n выполняется неравенство

$$\iint\limits_{\Omega-K_{\delta'_n}} f(M)\,d\omega \leqslant C = \text{const} < +\infty, \tag{9.40}$$

что и требовалось доказать.

Пример. Докажем, что интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{C}{r^\alpha}\,dx\,dy, \text{ где } C = \text{const}, \; r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \tag{9.41}$$

по ограниченной области Ω, содержащей внутри себя точку $M_0 \equiv (x_0, y_0)$, сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geqslant 2$.

В соответствии с замечанием 1 в конце п. 1 интеграл (9.41) по области Ω можно заменить интегралом по какой-либо подобласти Ω', содержащей внутри себя точку M_0. В качестве такой подобласти возьмем круг K_R с центром в точке M_0 и достаточно малым радиусом R и исследуем интеграл

$$\iint\limits_{K_R} \frac{C}{r^\alpha}\,dx\,dy, \quad C>0, \quad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \quad \alpha=\text{const}. \tag{9.42}$$

Для этого возьмем какую-либо монотонно стягивающуюся последовательность кругов

$$K_R \supset K_{\delta_1} \supset K_{\delta_n} \supset \ldots \ni M_0, \text{ где } \delta_n \to 0 \text{ при } n\to+\infty, \tag{9.43}$$

и рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{K_R-K_{\delta_n}} \frac{C}{r^\alpha}\,dx\,dy. \tag{9.44}$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$\begin{aligned}\iint\limits_{K_R-K_{\delta_n}} \frac{C}{r^\alpha}\,dx\,dy &= \iint\limits_{K_R-K_{\delta_n}} \frac{C}{r^\alpha}\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\delta_n}^{R} \frac{C}{r^\alpha}\,r\,dr = \\ &= 2\pi C \int\limits_{\delta_n}^{R} r^{1-\alpha}\,dr = \begin{cases} 2\pi C\left[\dfrac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{r=\delta_n}^{r=R} & \text{при } \alpha\neq 2, \\ 2\pi C\,[\ln r]_{r=\delta_n}^{r=R} & \text{при } \alpha=2. \end{cases}\end{aligned} \tag{9.45}$$

Если в (9.45) перейти к пределу при $\delta_n\to 0$, то мы получим, что интеграл (9.40) при $\alpha<2$ остается ограниченным, а при $\alpha\geqslant 2$ он становится неограниченным. Следовательно, интеграл (9.42), а вместе с ним и интеграл (9.41), *сходится* при $\alpha<2$ и *расходится* при $\alpha\geqslant 2$.

Аналогично в случае любого числа N независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ N-кратный интеграл

$$\iint\limits_{\Omega}\ldots\int \frac{C}{r^\alpha}\,dx_1\ldots dx_N, \quad C>0, \qquad r=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\ldots+(x_N-x_N^0)^2} \tag{9.46}$$

сходится при $\alpha<N$ и *расходится* при $\alpha\geqslant N$, если точка $M_0\equiv(x_1^0, \ldots, x_N^0)$ лежит внутри N-мерной области Ω. Таким обра-

зом, значение $\alpha = N$, равное размерности пространства, является критическим, оно отделяет значения $\alpha (\alpha < N)$, при которых интеграл (9.46) сходится, от значений $\alpha (\alpha \geqslant N)$, при которых этот интеграл расходится, причем значение $\alpha = N$ приводит к расходимости интеграла.

3. Абсолютная сходимость. Пусть функция $f(M)$, заданная в области Ω, имеет единственную особую точку M_0, принадлежащую области Ω или ее границе, и, какова бы ни была область ω, содержащая внутри себя M_0, $f(M)$ интегрируема в обычном смысле в области $\Omega - \omega$.

Определение 3. *Интеграл $\int\limits_\Omega \int f(M)\,d\omega$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_\Omega \int |f(M)|\,d\omega$.*

Теорема 9.7. *Если интеграл $\int\limits_\Omega \int f(M)\,d\omega$ сходится абсолютно, то он сходится.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 9.7, отметим некоторые общие свойства сходящихся несобственных интегралов. В силу теоремы о пределе суммы и теоремы о выносе постоянного множителя за знак предела, имеем:

1) *если интегралы $\int\limits_\Omega \int f_1(M)\,d\omega$ и $\int\limits_\Omega \int f_2(M)\,d\omega$ сходятся, то сходятся и интегралы $\int\limits_\Omega \int [f_1(M) \pm f_2(M)]\,d\omega$, причем имеет место равенство*

$$\int\limits_\Omega \int [f_1(M) \pm f_2(M)]\,d\omega = \int\limits_\Omega \int f_1(M)\,d\Omega \pm \int\limits_\Omega \int f_2(M)\,d\Omega;$$

2) *если интеграл $\int\limits_\Omega \int f(M)\,d\omega$ сходится, то при $C = \text{const}$ интеграл $\int\limits_\Omega \int Cf(M)\,d\omega$ также сходится и*

$$\int\limits_\Omega \int Cf(M)\,d\omega = C \int\limits_\Omega \int f(M)\,d\omega.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 9.7. Представим подынтегральную функцию $f(M)$ в виде разности двух неотрицательных функций

$$f(M) = |f(M)| - [|f(M)| - f(M)] = f_1(M) - f_2(M), \quad (9.47)$$

где

$$f_1(M) = |f(M)| \quad \text{и} \quad f_2(M) = |f(M)| - f(M).$$

Интеграл $\int\limits_\Omega\int f_1(M)\,d\omega = \int\limits_\Omega\int |f(M)|\,d\omega$ сходится по условию. Так как

$$f_2(M) = |f(M)| - f(M) \leqslant 2|f(M)|,$$

а интеграл

$$\int\limits_\Omega\int 2|f(M)|\,d\omega = 2\int\limits_\Omega\int |f(M)|\,d\omega$$

сходится по условию доказываемой теоремы, то, в силу теоремы 9.6, какова бы ни была стягивающаяся последовательность (9.29), соответствующая ей последовательность интегралов $\int\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}}\int 2|f(M)|\,d\omega$ ограничена. Поэтому, в силу очевидного неравенства

$$\int\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}}\int f_2(M)\,d\omega \leqslant \int\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}}\int 2|f(M)|\,d\omega,$$

последовательность $\int\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}}\int f_2(M)\,d\omega$ также ограничена. Следовательно, по теореме 9.6 интеграл $\int\limits_\Omega\int f_2(M)\,d\omega$ сходится. Но тогда, в силу (9.47), будет сходиться и интеграл $\int\limits_\Omega\int f(M)\,d\omega$, причем будет выполняться равенство

$$\int\limits_\Omega\int f(M)\,d\omega = \int\limits_\Omega\int f_1(M)\,d\omega - \int\limits_\Omega\int f_2(M)\,d\omega, \tag{9.48}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Для N-кратного несобственного интеграла при $N \geqslant 2$ справедлива и обратная теорема (см. п. 5), т. е. сходимость и абсолютная сходимость эквивалентны.

4. Признаки абсолютной сходимости.

***Теорема 9.8* (*общий признак сравнения*).** *Пусть всюду в области Ω выполняется неравенство*

$$0 \leqslant |f(M)| \leqslant g(M), \tag{9.49}$$

причем $f(M)$ *и* $g(M)$ *имеют единственную особую точку* M_0, *принадлежащую области* Ω *или ее границе. Тогда*:

1) *если* $\iint\limits_{\Omega} g(M)\,d\omega$ *сходится, то и* $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\omega$ *сходится абсолютно*;

2) *если* $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\omega$ *расходится, то и* $\iint\limits_{\Omega} g(M)\,d\omega$ *расходится.*

Доказательство. Возьмем какую-либо стягивающуюся последовательность областей (9.29). В силу неравенства (9.49), будем иметь

$$\iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}} |f(M)|\,d\omega \leqslant \iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}} g(M)\,d\omega. \tag{9.50}$$

1) Если $\iint\limits_{\Omega} g(M)\,d\omega$ сходится, то последовательность $\left\{\iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}} g(M)\,d\omega\right\}$ остается ограниченной, но тогда, в силу неравенства (9.50), последовательность $\left\{\iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}} |f(M)|\,d\omega\right\}$ также ограничена, а следовательно, по теореме 9.6 интеграл $\iint\limits_{\Omega} |f(M)|\,d\omega$ сходится.

2) Если интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\omega$ расходится, то расходится также и интеграл $\iint\limits_{\Omega} |f(M)|\,d\omega$; действительно, если бы последний интеграл сходился, то сходился бы по теореме 9.7 также и интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\omega$. Из расходимости интеграла $\iint\limits_{\Omega} |f(M)|\,d\omega$ вытекает, в силу теоремы 9.6, что при любом выборе стягивающейся последовательности (9.29) последовательность $\iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}} |f(M)|\,d\omega$ не ограничена; но тогда, в силу неравенства (9.50), не ограничена также последовательность $\iint\limits_{\Omega-\omega_{\delta_n}} g(M)\,d\omega$, а следовательно, интеграл $\iint\limits_{\Omega} g(M)\,d\omega$ расходится, что и требовалось доказать.

***Теорема 9.9* (*частный признак сравнения*).** *Если для функции, заданной в* Ω *и имеющей единственную особую точку*

$M_0(x_0, y_0)$, *принадлежащую области* Ω *или ее границе, выполняется неравенство*

$$|f(M)| = |f(x, y)| < \frac{C}{r^\alpha}, \quad \text{где} \quad C = \text{const} > 0, \qquad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \tag{9.51}$$

при $\alpha < 2$, *то интеграл* $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\omega$ *сходится и притом абсолютно.*

Доказательство. В силу (9.51) и в силу сходимости интеграла (9.41), при $\alpha < 2$ интеграл $\iint\limits_{\Omega} |f(M)|\,d\omega$ будет сходящимся по теореме 9.8, что и требовалось доказать.

Замечание. В случае несобственного интеграла по N-мерной области Ω

$$\overbrace{\iint\limits_{\Omega}\dots\int}^{N \text{ раз}} f(x_1, \dots, x_N)\,dx_1 \dots dx_N$$

от функции $f(M) = f(x_1, \dots, x_N)$, имеющей единственную особую точку $M_0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$ в области Ω или на ее границе, в частном признаке абсолютной сходимости (теорема 9.9) следует брать $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_N - x_N^0)^2}$ и $\alpha < N$.

Пример. Найдем силу притяжения материальной точки $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ с единичной массой материальным телом, занимающим объем Ω в пространстве (x, y, z), если объемная плотность массы тела равна $\rho(M) = \rho(x, y, z)$.

Найдем проекции силы притяжения на оси x, y, z (см. п. 5 § 2 гл. 2):

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \iiint\limits_{\Omega} \rho(M)\,\frac{x-x_0}{r^3}\,dx\,dy\,dz, \\ F_y &= \iiint\limits_{\Omega} \rho(M)\,\frac{y-y_0}{r^3}\,dx\,dy\,dz, \\ F_z &= \iiint\limits_{\Omega} \rho(M)\,\frac{z-z_0}{r^3}\,dx\,dy\,dz, \end{aligned}\right\} \tag{9.52}$$

где

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \qquad M \equiv (x, y, z).$$

В гл. 2 мы ограничились случаем, когда точка $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ лежит вне тела Ω; если же M_0 лежит внутри тела Ω, то интегралы (9.52) становятся, вообще говоря, несобственными. Пусть плотность $\rho(M)=\rho(x, y, z)$ ограничена в Ω, т. е. $\rho(M)\leqslant\rho_0=\text{const}$ при всех значениях $M\in\Omega$. Тогда

$$\left|\rho(M)\frac{x-x_0}{r^3}\right|\leqslant\rho_0\left|\frac{1}{r^2}\frac{x-x_0}{r}\right|\leqslant\frac{\rho_0}{r^2},\quad\text{ибо}\quad\left|\frac{x-x_0}{r}\right|\leqslant 1.$$

Так как $\alpha=2<N=3$, то, в силу частного признака сравнения, первый из интегралов (9.52) сходится абсолютно. Аналогично устанавливается абсолютная сходимость двух других интегралов (9.52).

Для N-кратных несобственных интегралов при $N\geqslant 2$, в отличие от однократных, имеет место тот замечательный факт, что из обычной сходимости интеграла вытекает его абсолютная сходимость, т. е. справедлива теорема, обратная теореме 9.7.

5. Эквивалентность сходимости и абсолютной сходимости. При $N\geqslant 2$ несобственный интеграл от $f(M)$ сходится ,тогда и только тогда, когда сходится интеграл от $|f(M)|$. Это вытекает из теоремы 9.7 и следующей теоремы.

Теорема 9.10. Если интеграл $\overbrace{\int\int\underset{\Omega}{\dots}\int}^{N\text{ раз}} f(M)\,dx_1\,\dots\,dx_N$ *сходится и* $N\geqslant 2$, *то интеграл* $\overbrace{\int\int\underset{\Omega}{\dots}\int}^{N}|f(M)|\,dx_1\,\dots\,dx_N$ *также сходится.*

Доказательство. Для упрощения записи доказательство будем вести для случая $N=2$. Пусть особая точка M_0 функции $f(M)=f(x, y)$ лежит внутри области Ω на плоскости *). Пусть интеграл $\underset{\Omega}{\int\int} f(M)\,d\omega$ сходится; предположим, что интеграл $\underset{\Omega}{\int\int}|f(M)|\,d\omega$ расходится. Тогда, взяв какую угодно стягивающуюся последовательность концентрических кругов $\{K_n\}$

$$\Omega\supset K_1\supset K_2\supset\dots\supset K_n\supset\dots\ni M_0\,^{*})\tag{9.53}$$

с центром в точке M_0, в силу неотрицательности $|f(M)|$, получим

$$\lim_{n\to+\infty}\underset{\Omega-K_n}{\int\int}|f(M)|\,d\omega=+\infty.\tag{9.54}$$

Но тогда последовательность (9.53) можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$\underset{K_n-K_{n+1}}{\int\int}|f(M)|\,d\omega\geqslant 2\underset{\Omega-K_n}{\int\int}|f(M)|\,d\omega+2n,\ n=1, 2, \dots\tag{9.55}$$

*) Если M_0 лежит на границе Ω, то вместо кругов K_n нужно взять их пересечения с Ω, т. е. их части, лежащие в Ω.

Введем функции

$$f_+(M)=\frac{1}{2}[\,|f(M)|+f(M)],\quad f_-(M)=\frac{1}{2}[\,|f(M)|-f(M)]. \tag{9.56}$$

Очевидно, что $f_+(M)\geqslant 0$, $f_-(M)\geqslant 0$ и

$$f(M)=f_+(M)-f_-(M),\quad |f(M)|=f_+(M)+f_-(M). \tag{9.57}$$

В силу (9.57), имеем

$$\iint\limits_{K_n-K_{n+1}}|f(M)|\,d\omega=\iint\limits_{K_n-K_{n+1}}f_+(M)\,d\omega+\iint\limits_{K_n-K_{n+1}}f_-(M)\,d\omega. \tag{9.58}$$

Последовательность (9.53) можно считать выбранной так, что

$$\iint\limits_{K_n-K_{n+1}}f_+(M)\,d\omega\geqslant\iint\limits_{K_n-K_{n+1}}f_-(M)\,d\omega. \tag{9.59}$$

(В противном случае можно перейти к подпоследовательности последовательности (9.53) и, если потребуется, к замене $f(M)$ на $-f(M)$.) Тогда из (9.58) и (9.55) вытекает, что

$$\iint\limits_{K_n-K_{n+1}}f_+(M)\,d\omega>\iint\limits_{\Omega-K_n}|f(M)|\,d\omega+n,\quad n=1,2,\ldots \tag{9.60}$$

Если разбить кольцо K_n-K_{n+1} на достаточно малые квадрируемые ячейки, то нижняя интегральная сумма $\sum\limits_{K_n-K_{n+1}} m_i^{f+}\Delta\omega_i$ *) для $\iint\limits_{K_n-K_{n+1}}f_+(M)\,d\omega$ на этом кольце будет, в силу (9.60), удовлетворять неравенству

$$\sum_{K_n-K_{n+1}} m_i^{f+}\Delta\omega_i>\iint\limits_{\Omega-K_n}|f(M)|\,d\omega+n,\quad n=1,2,\ldots \tag{9.61}$$

На всех этих ячейках $m_i^{f+}\geqslant 0$, так как $f_+\geqslant 0$ всюду. Не нарушая неравенства (9.61), отбросим из суммы $\sum\limits_{K_n-K_{n+1}} m_i^{f+}\Delta\omega_i$ все слагаемые, для которых $m_i^{f+}=0$. Если обозначить через G_n область, составленную из ячеек, соответствующих оставшимся слагаемым, то, очевидно, на этой области $f(M)=f_+(M)$ и

$$\iint\limits_{G_n}f(M)\,d\omega=\iint\limits_{G_n}f_+(M)\,d\omega\geqslant\sum_{G_n}m_i^{f+}\Delta\omega_i>$$
$$>\iint\limits_{\Omega-K_n}|f(M)|\,d\omega+n,\quad n=1,2,\ldots \tag{9.62}$$

*) Здесь m_i^{f+} означает точную нижнюю грань $f_+(M)$ на ячейке $\Delta\omega_i$.

Далее имеем

$$\iint\limits_{\Omega-K_n} f(M)\,d\omega \geqslant -\iint\limits_{\Omega-K_n} |f(M)|\,d\omega,\quad n=1,2,\ldots \tag{9.63}$$

Складывая (9.62) и (9.63), получим

$$\iint\limits_{H_n} f(M)\,d\omega > n,\quad n=1,2,\ldots, \tag{9.64}$$

где $H_n=(\Omega-K_n)+G_n$, причем если обозначить через ω_n разность $\Omega-H_n$, то, очевидно, диаметр $\omega_n\to 0$ при $n\to+\infty$. Следовательно, из (9.64) вытекает расходимость интеграла $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\omega$, что противоречит условию. Итак, предположение, что интеграл $\iint\limits_{\Omega} |f(M)|\,d\omega$ расходится, приводит к противоречию; следовательно, он сходится. Теорема доказана.

Замечание. Если в определении N-кратного несобственного интеграла при $N\geqslant 2$ области $\Omega-\omega_{\delta_n}$ считать связными, то теорема 9.10 сохранит свою силу. Действительно, область $H_n=(\Omega-K_n)+G_n$ в доказательстве теоремы 9.10 можно сделать связной, сохранив неравенство (9.64); для этого достаточно соединить связные куски, составляющие H_n, квадрируемыми полосками с достаточно малой суммарной площадью. Возможность построения таких полосок становится очевидной, если разбиение кольца K_n-K_{n+1} на квадрируемые ячейки для образования интегральной суммы $\sum\limits_{K_n-K_{n+1}} m_i^{f+}\Delta\omega_i$ осуществлять с помощью лучей, выходящих из центра M_0 этого кольца, и концентрических окружностей с центром в M_0.

В противоположность этому, если в случае однократного несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ вместо последовательностей интервалов $[a, b-\lambda]$, входящих в определение (см. § 2, соотношение (9.17)), брать исчерпывающие последовательности произвольных «разрывных» областей, то класс функций, интегрируемых в несобственном смысле, сузится; интегрируемыми в несобственном смысле функциями окажутся лишь абсолютно интегрируемые в несобственном смысле функции. (Абсолютно интегрируемые в несобственном смысле функции в обоих определениях, очевидно, одинаковы.)

6. Несобственные интегралы с неограниченной областью интегрирования, подынтегральные функции которых ограничены в любой ограниченной подобласти, исследуются совершенно аналогично. Сформулируем для примера определение несобственного интеграла и достаточный признак сходимости.

Определение 4. *Пусть дана неограниченная область* Ω. *Расширяющаяся последовательность ограниченных подобластей*

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \ldots,\ \Omega_n,\ \ldots \tag{9.65}$$

называется исчерпывающей, если, каково бы ни было $R > 0$, *все точки области* Ω, *принадлежащие кругу радиуса* R *с центром в начале координат, будут принадлежать всем* Ω_n, *начиная с достаточно большого* n.

Определение 5. *Пусть в неограниченной области* Ω *задана функция* $f(M)$, *интегрируемая в обычном смысле по любой ограниченной подобласти. Если при любом выборе исчерпывающей последовательности* (9.65) *соответствующая последовательность чисел*

$$\iint\limits_{\Omega_1} f(M)\,d\omega,\quad \iint\limits_{\Omega_2} f(M)\,d\omega,\ \ldots,\ \iint\limits_{\Omega_n} f(M)\,d\omega,\ \ldots$$

сходится к одному и тому же конечному пределу J, *то интеграл* $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\omega$ *называется сходящимся; в противном случае интеграл называется расходящимся.*

Достаточный признак сходимости. *Если* $f(M) = f(x, y)$ *удовлетворяет требованиям, сформулированным в предыдущем определении, и неравенству*

$$|f(M)| \leqslant \frac{C}{r^\alpha}, \quad \text{где } C = \text{const} > 0,$$

$$\alpha = \text{const} < 2, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

причем $M_0 = (x_0, y_0)$ — *какая-нибудь фиксированная точка, то интеграл* $\iint\limits_{\Omega} f(M)\,d\omega$ *сходится.*

Заметим, что общие теоремы, аналогичные 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.10, верны и для несобственных интегралов с неограниченными областями интегрирования.

7. Методы вычисления несобственных кратных интегралов. Сведение сходящегося несобственного двойного интеграла к повторному осуществляется так же, как и в случае собственного двойного интеграла: 1) для неотрицательной (неположительной) подынтегральной функции — при условии сходимости повторного интеграла от этой функции, 2) для знакопеременной подынтегральной функции — при условии сходимости повторного интеграла от ее модуля *).

Замена переменных в сходящемся несобственном N-кратном интеграле осуществляется по тем же правилам, что и в случае собственного N-кратного интеграла.

*) Аналогично обстоит дело в случае N-кратного несобственного интеграла при $N \geqslant 3$.

Оставляя в стороне доказательства общих утверждений, ограничимся примером, в котором используются сведение несобственного двойного интеграла к повторному и замена переменных в несобственном двойном интеграле.

Пусть требуется вычислить интеграл $J=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Его сходимость устанавливается обычным образом. Так как при изменении обозначения переменного интегрирования величина определенного интеграла не меняется, то $J=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$. Поэтому

$$J^2=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy=\int\limits_0^{+\infty}\left(e^{-x^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)dx=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty} dx\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy,$$

причем повторный интеграл сходится. Двойной интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} dx\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy,$$

очевидно, также сходится, в силу достаточного признака сходимости. Следовательно,

$$J^2=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$J^2=\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2}r\,dr=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2}r\,dr=\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$J=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Этот прием вычисления данного интеграла предложен Пуассоном.