ГЛАВА 10

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

В математике и математической физике весьма эффективным аналитическим аппаратом являются интегралы, зависящие от параметра; таковы, например, эйлеровы интегралы (см. § 3), интегралы типа потенциала (см. вып. 4) и т. п.

Эта глава посвящена изучению свойств интегралов, зависящих от параметра.

§ 1. Собственные и простейшие несобственные интегралы, зависящие от параметра

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Пусть функция $u=f(x, y)$, заданная в прямоугольнике П: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, интегрируема по x на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ при каждом значении y из отрезка $c \leqslant y \leqslant d$. Тогда интеграл

$$J(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx \tag{10.1}$$

является функцией параметра y, определенной на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$. Займемся изучением свойств интегралов вида (10.1).

***Теорема 10.1* (о непрерывной зависимости интеграла от параметра).** *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике* П: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, *то интеграл* $J(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$ *является непрерывной функцией параметра y на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$.*

Доказательство. Из непрерывности функции $f(x, y)$ в замкнутом прямоугольнике П следует ее равномерная непрерывность. Это значит, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, не зависящее от расположения точек (x', y') и (x'', y'') в прямоугольнике П, что при выполнении неравенств

$$|x'-x''|<\delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad |y'-y''|<\delta(\varepsilon) \tag{10.2}$$

выполняется также неравенство

$$|f(x', y')-f(x'', y'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{10.3}$$

В частности, полагая $x'=x''=x$, получим, что для любых y' и y'' из отрезка $c\leqslant y\leqslant d$, удовлетворяющих неравенству

$$|y'-y''|<\delta(\varepsilon), \tag{10.2'}$$

и всех x из отрезка $a\leqslant x\leqslant b$ будет выполняться неравенство

$$|f(x, y')-f(x, y'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{10.3'}$$

Поэтому при любых y' и y'' из отрезка $c\leqslant y\leqslant d$, удовлетворяющих неравенству (10.2′), будет выполняться неравенство

$$|J(y')-J(y'')|=\left|\int_a^b [f(x, y')-f(x, y'')]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x, y')-f(x, y'')|\,dx\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon,$$

а это означает равномерную непрерывность $J(y)$ на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$. Теорема доказана.

Следствие. *При условиях теоремы* 10.1 *функция* $F(u, v, y)=\int_u^v f(x, y)\,dx$ *непрерывна в замкнутом параллелепипеде* Π^*:

$$a\leqslant u\leqslant b,\quad a\leqslant v\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d.$$

Доказательство. В силу непрерывности функции $f(x, y)$ в замкнутом прямоугольнике Π, найдется такая константа C, $0<C<+\infty$, что $|f(x, y)|<C$ всюду в Π. Поэтому при любых (u', v', y') и (u'', v'', y'') из Π^* выполняется неравенство

$$|F(u', v', y')-F(u'', v'', y'')|=\left|\int_{u'}^{v'} f(x, y')\,dx-\int_{u''}^{v''} f(x, y'')\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{u'}^{v'} [f(x, y')-f(x, y'')]\,dx\right|+\left|\int_{u'}^{u''} f(x, y'')\,dx\right|+$$

$$+\left|\int_{v'}^{v''} f(x, y'')\,dx\right|\leqslant\left|\int_{u'}^{v'} [f(x, y')-f(x, y'')]\,dx\right|+$$

$$+C|u''-u'|+C|v''-v'|. \tag{10.4}$$

Пусть точка (u', v', y') фиксирована, а точка $(u'', v'', y'') \to (u', v', y')$. Тогда первое слагаемое в правой части (10.4) стремится к нулю по теореме 10.1, а второе и третье — очевидным образом, что и требовалось доказать.

Теорема 10.2 **(*о дифференцировании интеграла по параметру*).** *Если $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в прямоугольнике* Π: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, *то интеграл* $J(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ *является дифференцируемой функцией параметра y на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$, причем всюду на этом отрезке*

$$\frac{dJ}{dy} = \frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x, y)\,dx = \int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx. \tag{10.5}$$

Замечание. Формула (10.5) называется формулой дифференцирования интеграла по параметру по правилу Лейбница: *производная интеграла по параметру равна интегралу от производной подынтегральной функции по этому параметру.*

Доказательство. Мы должны доказать, что

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{J(y+\Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx.$$

Для этого докажем, что разность между переменной величиной $\frac{J(y+\Delta y) - J(y)}{\Delta y}$ и ее предполагаемым пределом $\int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx$ стремится к нулю при $\Delta y \to 0$. В силу формулы конечных приращений, имеем

$$\frac{J(y+\Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \int\limits_a^b \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\,dx = \int\limits_a^b f'_y(x, y+\theta\,\Delta y)\,dx,$$

где $0 \leqslant \theta < 1$. Поэтому упомянутая разность равна

$$\frac{J(y+\Delta y) - J(y)}{\Delta y} - \int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx = \int\limits_a^b \left[f'_y(x, y+\theta\,\Delta y) - f'_y(x, y)\right]dx. \tag{10.6}$$

Оценим ее при достаточно малых значениях $|\Delta y|$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Так как $f'_y(x, y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике Π, то она равномерно непрерывна в нем. Следовательно, найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $|\Delta y| < \delta(\varepsilon)$ будет

$$|f'_y(x, y+\Delta y) - f'_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

при всех $x \in [a, b]$ и любых y и $y+\Delta y$ из отрезка $[c, d]$. Так как $0 < \theta < 1$, то и подавно при всех указанных x, y и $y+\Delta y$ будет

$$|f'_y(x, y+\theta\,\Delta y) - f'_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Следовательно, в силу (10.6),

$$\left|\frac{J(y+\Delta y) - J(y)}{\Delta y} - \int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_a^b [f'_y(x, y+\theta\,\Delta y) - f'_y(x, y)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b |f'_y(x, y+\theta\,\Delta y) - f'_y(x, y)|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

при всех $|\Delta y| < \delta(\varepsilon)$. Теорема доказана.

***Теорема 10.3** (**о дифференцировании по параметру интеграла с пределами интегрирования, зависящими от параметра**). Пусть $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в прямоугольнике Π: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, а $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условию $a < x_i(y) < b$ $(i = 1, 2)$ при $c \leqslant y \leqslant d$. Тогда производная интеграла*

$$J(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx \tag{10.7}$$

по параметру y существует и равна

$$J'(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f'_y(x, y)\,dx + f(x_2(y), y)\frac{dx_2}{dy} - f(x_1(y), y)\frac{dx_1}{dy}. \tag{10.8}$$

Доказательство. Мы имеем

$$J(y) = F(x_1(y), x_2(y), y), \tag{10.9}$$

причем функция $F(u, v, y)=\int\limits_u^v f(x, y)\,dx$ при $a \leqslant u \leqslant b$, $a \leqslant v \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ имеет непрерывные частные производные:

$$F_u=-f(x, u), \quad F_v=f(x, v), \quad F_y=\int\limits_u^v f'_y(x, y)\,dx. \tag{10.10}$$

Непрерывность частной производной F_y, существующей по теореме 10.3, имеет место в силу следствия теоремы (10.1). Поскольку функции $x=x_1(y)$ и $x=x_2(y)$ дифференцируемы, то к интегралу (10.7) можно применить правило дифференцирования сложной функции, которое и приведет к равенству (10.8). Теорема доказана.

Теорема 10.4 (об интегрировании интеграла по параметру). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике* П: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, *то*

$$\int\limits_c^d J(y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x, y)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x, y)\,dy, \tag{10.11}$$

т. е. для того, чтобы проинтегрировать интеграл $J(y)=\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ по параметру y, нужно подынтегральную функцию $f(x, y)$ проинтегрировать по этому параметру y.

Доказательство. Равенство (10.11) является следствием теоремы о сведении двойного интеграла к повторному (см. § 5 гл. 1).

Приведем еще одно доказательство, легко распространяющееся на N-мерный случай (см. § 4). Вместо равенства (10.11) докажем более общее равенство

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^t f(x, y)\,dx=\int\limits_a^t dx\int\limits_c^d f(x, y)\,dy \quad \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{10.12}$$

Если ввести обозначения

$$\varphi(t)=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^t f(x, y)\,dx, \quad \psi(t)=\int\limits_a^t dx\int\limits_c^d f(x, y)\,dy, \tag{10.13}$$

то достаточно доказать, что $\varphi'(t)\equiv\psi'(t)$ при $a \leqslant t \leqslant b$ и что $\varphi(a)=\psi(a)$, так как тогда, очевидно, будет $\varphi(t)\equiv\psi(t)$ на $[a, b]$.

Равенство $\varphi(a)=\psi(a)$ очевидно, так как $\varphi(a)=0$ и $\psi(a)=0$.

Полагая $F(t, y)=\int\limits_a^t f(x, y)\,dx$, получим $\varphi(t)=\int\limits_c^d F(t, y)\,dy$, где

$F(t, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π^*: $a \leqslant t \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, в силу следствия теоремы 10.1, а $F'_t(t, y) = f(t, y)$ непрерывна по условию доказываемой теоремы. Следовательно, по теореме 10.2

$$\varphi'(t) = \int_c^d F'_t(t, y)\, dy = \int_c^d f(t, y)\, dy. \tag{10.14}$$

Полагая $\xi(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$, получим $\psi(t) = \int_a^t \xi(x)\, dx$. Так как по теореме 10.1 $\xi(x)$ является непрерывной функцией x на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, то по теореме о дифференцировании определенного интеграла по верхнему пределу

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t \xi(x)\, dx = \xi(t) = \int_c^d f(t, y)\, dy. \tag{10.15}$$

Сопоставляя (10.14) и (10.15), получаем, что $\varphi'(t) \equiv \psi'(t)$ при $a \leqslant t \leqslant b$. Следовательно, в силу равенства $\varphi(a) = \psi(a)$, также $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ при $a \leqslant t \leqslant b$. В частности, $\varphi(b) = \psi(b)$, т. е. равенство (10.11) выполняется. Что и требовалось доказать.

2. Простейшие несобственные интегралы, зависящие от параметра. Теоремы 10.1, 10.2, 10.4 легко распространяются на несобственные интегралы следующего специального вида:

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)\, g(x)\, dx, \tag{10.16}$$

где $f(x, y)$ непрерывна, а $g(x)$ — вообще говоря, разрывная функция, но такая, что интеграл $\int_a^b |g(x)|\, dx$ сходится, причем один или оба предела интегрирования могут быть бесконечными.

Перейдем к точным формулировкам соответствующих обобщенных теорем*).

Теорема 10.1′ (обобщенная теорема о непрерывной зависимости интеграла от параметра). *Если $f(x, y)$ непрерывна и ограничена при $a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$, а интеграл* $\int_a^{+\infty} |g(x)|\, dx$

*) Теоремы 10.1′, 10.2′, 10.4′ находят применение в математической физике и в теории интеграла Фурье.

сходится, то

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,\ y)\,g(x)\,dx \tag{10.17}$$

является непрерывной функцией y на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$.

Теорема 10.2′ (обобщенная теорема о дифференцировании интеграла по параметру). *Если $f(x,\ y)$ и $f'_y(x,\ y)$ непрерывны и ограничены при $a\leqslant x<+\infty$, $c\leqslant y\leqslant d$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|g(x)|\,dx$ сходится, то интеграл (10.17) является дифференцируемой функцией параметра y на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$, причем всюду на этом отрезке выполняется равенство*

$$J'(y)=\int_a^{+\infty} f'_y(x,\ y)\,g(x)\,dx. \tag{10.18}$$

Теорема 10.4′ (обобщенная теорема об интегрировании интеграла по параметру). *При условиях теоремы* 10.1 *интеграл* (10.17) *является интегрируемой функцией параметра y на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$, причем*

$$\int_c^d J(y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,\ y)\,g(x)\,dx=\int_a^{+\infty}\left(g(x)\int_c^d f(x,\ y)\,dy\right)dx. \tag{10.19}$$

Докажем для примера теорему 10.1′. Пусть $|f(x,\ y)|<C=\text{const}$ при $a\leqslant x<+\infty$, $c\leqslant y\leqslant d$, а $\int\limits_a^{+\infty}|g(x)|\,dx<K<+\infty$ и пусть дано $\varepsilon>0$. В силу сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty}|g(x)|\,dx$, можно взять $l>a$ столь большим, что будет $2C\int\limits_l^{+\infty}|g(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$. Фиксировав такое l и взяв y' и y'' на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$, представим разность $J(y')-J(y'')$ в виде

$$J(y')-J(y'')=\int_a^l [f(x,\ y')-f(x,\ y'')]\,g(x)\,dx+ \\ +\int_l^{+\infty}[f(x,\ y')-f(x,\ y'')]\,g(x)\,dx. \tag{10.20}$$

В прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant l$, $c\leqslant y\leqslant d$ функция $f(x,\ y)$, будучи непрерывной, равномерно непрерывна. Поэтому найдется такое

$\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых y' и y'' из отрезка $c\leqslant y\leqslant d$, удовлетворяющих неравенству $|y'-y''|<\delta(\varepsilon)$, при всех x из отрезка $a\leqslant x\leqslant l$ будет выполняться неравенство

$$|f(x,\ y')-f(x,\ y'')|<\frac{\varepsilon}{2K}.$$

Но тогда из равенства (10.20) получаем неравенство

$$|J(y')-J(y'')|\leqslant\int_a^l|f(x,\ y')-f(x,\ y'')||g(x)|\,dx+$$

$$+\int_l^{+\infty}\{|f(x,\ y')|-|f(x,\ y'')|\}\,|g(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2K}\int_a^l|g(x)|\,dx+2C\int_l^{+\infty}|g(x)|\,dx\leqslant\frac{\varepsilon}{2K}K+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$$\text{при }|y'-y''|<\delta(\varepsilon),$$

а это означает, что интеграл $J(y)$ является непрерывной функцией на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$.

Мы предоставляем читателю доказать теоремы 10.2$'$ и 10.4$'$ для интегралов вида (10.17), а также переформулировать и доказать теоремы 10.1$'$, 10.2$'$ и 10.4$'$ для интегралов вида (10.16). Заметим только, что в случае интегралов вида (10.16): 1) ограниченность $f(x,\ y)$, $f'_y(x,\ y)$ вытекает из непрерывности $f(x,\ y)$, $f'_y(x,\ y)$ в рассматриваемой области $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$, 2) отпадает необходимость разбиения интервала интегрирования по x, $a\leqslant x\leqslant b$, на части, в отличие от того, как это делалось при доказательстве теоремы 10.1$'$ для интегралов вида (10.17).

Дифференцирование и интегрирование интегралов по параметру широко применяются для вычисления интегралов, зависящих от параметра, а также для вычисления интегралов, не зависящих от параметра, после надлежащего введения параметра.

Пример. Вычислим интеграл

$$J(y)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin xy}{x}\,dx,\ \text{где }\alpha=\text{const}>0,\ -A\leqslant y\leqslant A. \quad (10.21)$$

Полагая $f(x,\ y)=\dfrac{\sin xy}{x}$, $g(x)=e^{-\alpha x}$, получим, что $f(x,\ y)$ и $f'_y(x,\ y)$ непрерывны и ограничены в полуполосе $0\leqslant x<+\infty$, $-A\leqslant y\leqslant A$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty}|g(x)|\,dx=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\,dx=\dfrac{1}{\alpha}$

сходится. Поэтому можно применить обобщенную теорему 10.2′ для интеграла вида (10.17). Дифференцируя по параметру под знаком интеграла, получим

$$J'(y)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos xy\,dx.$$

Выполняя дважды в последнем интеграле интегрирование по частям (по x), найдем

$$J'(y)=\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}. \tag{10.22}$$

Так как, согласно (10.21), $J(0)=0$, то, интегрируя (10.22) в пределах от 0 до y, получим

$$J(y)=\int\limits_0^y \frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}\,dy=\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}.$$

Можно поступать и несколько иначе. Интегрируя (10.22) по y, будем иметь

$$J(y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}+C.$$

Так как, в силу (10.21), $J(0)=0$, то, полагая в равенстве, содержащем константу C, $y=0$, получим, что $C=0$. При обоих подходах требуется, чтобы было известно значение вычисляемого интеграла при некотором частном значении параметра y.

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $u=f(x, y)$ определена при $0\leqslant x<+\infty$, $c\leqslant y\leqslant d$ и пусть при каждом значении y, $c\leqslant y\leqslant d$, интеграл

$$J(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \tag{10.23}$$

сходится; тогда $J(y)$ является функцией y, определенной на отрезке $[c, d]$. В силу определения несобственного интеграла, имеем

$$J(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx=\lim_{l\to+\infty}\int\limits_a^l f(x, y)\,dx. \tag{10.24}$$

Аналогично обстоит дело с интегралами от неограниченных функций. Пусть, например, функция $u=f(x, y)$ определена при $a\leqslant x<b$, $c\leqslant y\leqslant d$, не ограничена при $x\to b-0$ и