сходится. Поэтому можно применить обобщенную теорему 10.2′ для интеграла вида (10.17). Дифференцируя по параметру под знаком интеграла, получим

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos xy \, dx.$$

Выполняя дважды в последнем интеграле интегрирование по частям (по x), найдем

$$J'(y) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}. \tag{10.22}$$

Так как, согласно (10.21), $J(0) = 0$, то, интегрируя (10.22) в пределах от 0 до y, получим

$$J(y) = \int_0^y \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2} \, dy = \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha}.$$

Можно поступать и несколько иначе. Интегрируя (10.22) по y, будем иметь

$$J(y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha} + C.$$

Так как, в силу (10.21), $J(0) = 0$, то, полагая в равенстве, содержащем константу C, $y = 0$, получим, что $C = 0$. При обоих подходах требуется, чтобы было известно значение вычисляемого интеграла при некотором частном значении параметра y.

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $u = f(x, y)$ определена при $0 \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$ и пусть при каждом значении y, $c \leqslant y \leqslant d$, интеграл

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx \tag{10.23}$$

сходится; тогда $J(y)$ является функцией y, определенной на отрезке $[c, d]$. В силу определения несобственного интеграла, имеем

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx = \lim_{l \to +\infty} \int_a^l f(x, y) \, dx. \tag{10.24}$$

Аналогично обстоит дело с интегралами от неограниченных функций. Пусть, например, функция $u = f(x, y)$ определена при $a \leqslant x < b$, $c \leqslant y \leqslant d$, не ограничена при $x \to b - 0$ и при каждом значении $y \in [c, d]$ интеграл

$$J^*(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx = \lim_{\lambda \to 0+0} \int_a^{b-\lambda} f(x, y)\,dx \qquad (10.25)$$

сходится. Тогда $J^*(y)$ является функцией y, определенной на отрезке $[c, d]$.

1. Понятие равномерной сходимости. В теории несобственных интегралов, зависящих от параметра, важную роль играет понятие равномерной сходимости. При наличии равномерной сходимости с несобственными интегралами, зависящими от параметра, можно обращаться, вообще говоря, как с собственными (см. п. 3 настоящего параграфа). Остановимся сначала на определении равномерной сходимости для интеграла с бесконечным интервалом интегрирования.

Определение 1. *Интеграл* (10.23) *называется равномерно сходящимся по параметру y (относительно параметра y) на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $L = L(\varepsilon)$, что неравенство*

$$\left| J(y) - \int_a^l f(x, y)\,dx \right| = \left| \int_l^{+\infty} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon \qquad (10.26)$$

будет выполняться при всех $l > L(\varepsilon)$ сразу для всех $y \in [c, d]$.

Аналогично определяется равномерная сходимость и для интеграла от неограниченной функции.

Определение 2. *Интеграл* (10.25) *называется равномерно сходящимся по параметру y на отрезке $[c, d]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство*

$$\left| J^*(y) - \int_a^{b-\lambda} f(x, y)\,dx \right| = \left| \int_{b-\lambda}^{b} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon \qquad (10.27)$$

будет выполняться при всех λ, удовлетворяющих неравенству $0 < \lambda < \delta(\varepsilon)$, сразу для всех $y \in [c, d]$.

Примеры. 1. Интеграл $J(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$ сходится при каждом y на отрезке $0 \leqslant y \leqslant 1$, но эта сходимость не является равномерной. Действительно,

$$\int_l^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = \int_{ly}^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-ly}$$

при сколь угодно большом фиксированном $l>0$ будет $>\frac{1}{2}$ при всех значениях y, достаточно близких к нулю, и, следовательно, при $\varepsilon=\frac{1}{2}$ не найдется такого $L(\varepsilon)$, чтобы при $l>L(\varepsilon)$ неравенство

$$\left|\int_{l}^{+\infty} ye^{-xy}\,dx\right|<\varepsilon=\frac{1}{2}$$

выполнялось сразу для всех y из отрезка $0\leqslant y\leqslant 1$.

Если же отрезок $0\leqslant y\leqslant 1$ заменить отрезком $0<\delta\leqslant y\leqslant 1$, то на нем интеграл $J(y)=\int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx$ сходится уже равномерно. Действительно, $\int\limits_{l}^{+\infty} ye^{-xy}\,dx=\int\limits_{ly}^{+\infty} e^{-t}\,dt=e^{-ly}\leqslant e^{-l\delta}$ при $0<\delta\leqslant y\leqslant 1$; поэтому при $0<\varepsilon<1$ и $l>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\delta}$ неравенство

$$\left|\int_{l}^{+\infty} ye^{-xy}\,dx\right|<\varepsilon$$

будет выполнено сразу при всех y из отрезка $0<\delta\leqslant y\leqslant 1$.

2. Интеграл $J(y)=\int\limits_0^1 yx^{y-1}\,dx$ сходится при каждом y из отрезка $0\leqslant y\leqslant 1$, но эта сходимость не является равномерной. Заметив, что подынтегральная функция становится неограниченной при $x\to 0+0$, оценим интеграл $\int\limits_0^{\lambda} yx^{y-1}\,dx=x^y\Big|_0^{\lambda}=\lambda^y$. Как бы ни было мало фиксированное $\lambda>0$, при $y\to 0+0$ этот интеграл стремится к единице. Поэтому при $\varepsilon=\frac{1}{2}$ не найдется такого $\delta=\delta(\varepsilon)$, чтобы при $0<\lambda<\delta(\varepsilon)$ неравенство $\left|\int\limits_0^{\lambda} yx^{y-1}\,dx\right|<\varepsilon=\frac{1}{2}$ выполнялось сразу для всех y из отрезка $0\leqslant y\leqslant 1$.

Если же отрезок $0\leqslant y\leqslant 1$ заменить отрезком $0<\delta_0\leqslant y\leqslant 1$, то на нем интеграл $J(y)=\int\limits_0^1 yx^{y-1}\,dx$ сходится уже равномерно. Действительно, $\int\limits_0^\lambda yx^{y-1}\,dx=\lambda^y\leqslant\lambda^{\delta_0}$ при $0<\lambda<1$ и $\delta_0\leqslant y\leqslant 1$. Так что, если $0<\varepsilon<1$ и $\lambda<\varepsilon^{\frac{1}{\delta_0}}$, то $\left|\int\limits_0^\lambda yx^{y-1}\,dx\right|<\varepsilon$ при всех y из отрезка $\delta_0\leqslant y\leqslant 1$.

2. Сведение несобственного интеграла, зависящего от параметра, к последовательности функций позволяет доказательство основных теорем о таких интегралах свести к простой ссылке на соответствующие теоремы о последовательностях функций.

Если интеграл

$$J(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,\ y)\,dx \tag{10.28}$$

сходится при каждом y из отрезка $[c,\ d]$, то, какова бы ни была последовательность значений $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_k,\ \ldots\ \to+\infty$ при $k\to+\infty$, где $l_k\geqslant a$ при $k=1,\ 2,\ \ldots$, последовательность функций

$$F_k(y)=\int\limits_a^{l_k} f(x,\ y)\,dx,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\qquad c\leqslant y\leqslant d,$$

будет, очевидно, сходиться к $J(y)$ на отрезке $[c,\ d]$.

Пусть интеграл (10.28) сходится при каждом y из отрезка $[c,\ d]$; тогда справедлива

Теорема 10.5. *Для равномерной сходимости интеграла $J(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,\ y)\,dy$ по параметру y на отрезке $[c,\ d]$ необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе последовательности значений $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_k,\ \ldots\to+\infty$ при $k\to+\infty$ последовательность функций*

$$F_k(y)=\int\limits_a^{l_k} f(x,\ y)\,dx,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{10.29}$$

сходилась к $J(y)$ равномерно на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$.

Доказательство. Необходимость. Пусть интеграл (10.28) сходится равномерно на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$ и пусть дано $\varepsilon>0$. Тогда найдется такое $L(\varepsilon)$, что при всех $l>L(\varepsilon)$ неравенство

$$\left|J(y)-\int\limits_a^{l} f(x,\ y)\,dx\right|<\varepsilon$$

будет выполняться сразу для всех $y\in[c,\ d]$.

Пусть $l_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ (причем $l_k \geqslant a$ при $k = 1, 2, \ldots$). Тогда найдется такое $N(\varepsilon)$, что при всех $k \geqslant N(\varepsilon)$ будет $l_k > L(\varepsilon)$, а следовательно, при всех таких k, в силу выбора $L(\varepsilon)$, будет выполняться неравенство

$$|J(y) - F_k(y)| = \left| J(y) - \int_a^{l_k} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon$$

сразу для всех $y \in [c, d]$, что и означает равномерную на отрезке сходимость последовательности (10.29) к интегралу (10.28).

Достаточность. Если всякая последовательность функций вида (10.29), где $l_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, сходится равномерно к $J(y)$ на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$, то интеграл (10.28) будет равномерно сходящимся по параметру y на этом отрезке. Действительно, если бы интеграл (10.28), сходящийся по условию при каждом $y \in [c, d]$, сходился неравномерно относительно y на этом отрезке, то существовало бы такое $\varepsilon_0 > 0$, что при сколь угодно большом L нашлись бы такие $l > L$ и $y \in [c, d]$, для которых выполнялось бы неравенство

$$\left| J(y) - \int_a^{l} f(x, y)\,dx \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Тогда, придавая L значения $L = 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$, мы получили бы последовательности соответствующих значений $l_k > k$ и $y_k \in [c, d]$, для которых было бы

$$\left| J(y_k) - \int_a^{l_k} f(x, y_k)\,dx \right| = |J(y_k) - F_k(y_k)| \geqslant \varepsilon_0,$$

т. е. построенная последовательность функций $F_k(y) = \int_a^{l_k} f(x, y)\,dx$, $k = 1, 2, \ldots$, оказалась бы неравномерно сходящейся на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$, что противоречит условию. Теорема доказана.

Замечание 1. Если функция $f(x, y)$ сохраняет знак, например неотрицательна, то для равномерной сходимости интеграла $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ по y на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$ достаточно, чтобы при каком-либо одном выборе последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots$ соответствующая последовательность функций (10.29) сходилась к $J(y)$ равномерно на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$.

Действительно, если $f(x, y)$ неотрицательна, то $\int\limits_a^l f(x, y)\,dx \geqslant \geqslant \int\limits_a^{l_k} f(x, y)\,dx$ при всех $l \geqslant l_k$. Поэтому

$$\left| J(y) - \int\limits_a^l f(x, y)\,dx \right| \leqslant \left| J(y) - \int\limits_a^{l_k} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{при всех } l > l_k$$

сразу для всех $y \in [c, d]$, если только l_k достаточно велико.

З а м е ч а н и е 2. Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $0 \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$ и сохраняет знак, например н е о т р и ц а т е л ь н а, а интеграл $J(y) = \int\limits_0^{+\infty} f(x, y)\,dx$ является непрерывной функцией параметра y на отрезке $[c, d]$, то этот интеграл сходится р а в н о м е р н о на отрезке $[c, d]$.

Действительно, взяв какую-либо возрастающую последовательность $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots \to +\infty$ $(l_k \geqslant a,\ k = 1, 2, \ldots)$, получим последовательность непрерывных, в силу теоремы (10.1), функций

$$F_k(y) = \int\limits_a^{l_k} f(x, y)\,dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{А}$$

монотонно возрастающую, в силу неотрицательности $f(x, y)$, и сходящуюся к непрерывной функции

$$J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \tag{Б}$$

на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$. Но тогда по теореме Дини (см. п. 1 § 2 гл. 8) последовательность (А) будет равномерно сходиться на отрезке $[c, d]$ к своему пределу (Б), а следовательно, в силу замечания 1, интеграл $J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ будет равномерно сходящимся на этом отрезке.

З а м е ч а н и е 3. Несобственный интеграл

$$J^*(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx = \lim_{\lambda \to 0+0} \int\limits_a^{b-\lambda} f(x, y)\,dx$$

можно аналогичным образом свести к последовательности функций $F_k^*(y)=\int\limits_a^{b-\lambda_k} f(x, y)\,dx$, где $\lambda_k \to 0+0$ при $k\to+\infty$. Подробности мы опускаем.

3. Свойства равномерно сходящихся интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 10.6. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в полуполосе $a\leqslant x<+\infty$, $c\leqslant y\leqslant d$, а интеграл $J(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$, то на этом отрезке $J(y)$ является непрерывной функцией.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность чисел $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots \to +\infty$ при $k\to+\infty$ $(l_k \geqslant a)$ и рассмотрим последовательность функций

$$F_k(y)=\int\limits_a^{l_k} f(x, y)\,dx, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ c\leqslant y\leqslant d.$$

По теореме 10.1 о непрерывной зависимости собственного интеграла от параметра, все они непрерывны на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$. По теореме 10.5 эта последовательность сходится равномерно на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$ к интегралу $J(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$, а следовательно $J(y)$, как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, будет непрерывной функцией. Теорема доказана.

Теорема 10.7 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру). *Пусть $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны при $c\leqslant y\leqslant d$, $a\leqslant x<+\infty$ и интеграл*

$$J(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \tag{10.28}$$

сходится на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$, а интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx \tag{10.30}$$

сходится равномерно на этом отрезке. Тогда $J(y)$ является дифференцируемой функцией y на $[c, d]$, причем

$$\frac{dJ}{dy}=\frac{d}{dy}\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx=\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx. \tag{10.31}$$

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность чисел $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots \to +\infty$ при $k \to +\infty$ ($l_k \geqslant a$) и рассмотрим последовательность функций

$$F_k(y) = \int_a^{l_k} f(x, y)\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots, \; c \leqslant y \leqslant d,$$

сходящуюся на отрезке $[c, d]$ к интегралу $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$. По теореме 10.3 о дифференцировании собственного интеграла по параметру имеем

$$F'_k(y) = \frac{d}{dy}\int_a^{l_k} f(x, y)\,dx = \int_a^{l_k} f'_y(x, y)\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \; c \leqslant y \leqslant d,$$

причем все $F'_k(y)$ непрерывны на $[c, d]$; а в силу равномерной сходимости интеграла (10.30), последовательность функций $F'_k(y)$ сходится равномерно на отрезке $[c, d]$ к интегралу (10.30). Итак,

$$F_k(y) \to J(y) \text{ на } [c, d], \quad F'_k(y) \rightrightarrows \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx \text{ на } [c, d],$$

причем $F'_k(y)$ непрерывны на $[c, d]$. Поэтому, в силу теоремы о дифференцировании функциональной последовательности (см. п. 3 § 2 гл. 8) $J(y)$ будет дифференцируемой функцией на $[c, d]$, и всюду на этом отрезке будет

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx, \tag{10.31}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 10.8 (об интегрировании несобственного интеграла по параметру). *Если $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$, а интеграл*

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \tag{10.28}$$

сходится равномерно на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$, то

$$\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{10.32}$$

Доказательство. Какова бы ни была последовательность чисел $l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots \to +\infty$ при $k \to +\infty$ ($l_k \geqslant a$), соответствующая последовательность функций

$$F_k(y)=\int_a^{l_k} f(x,\ y)\,dx, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

по теореме 10.5 о сведении равномерно сходящегося интеграла к последовательности функций сходится к $J(y)$ равномерно на $[c,\ d]$. По теореме 10.1 о непрерывности собственного интеграла, как функции параметра, все $F_k(y)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, непрерывны на отрезке $[c,\ d]$. Следовательно, по теореме об интегрировании функциональных последовательностей (см. п. 2 § 2 гл. 8) $\lim\limits_{k\to+\infty}\int_c^d F_k(y)\,dy=\int_c^d J(y)\,dy$.

Но по теореме об интегрировании собственного интеграла по параметру

$$\int_c^d F_k(y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^{l_k} f(x,\ y)\,dx=\int_a^{l_k} dx\int_c^d f(x,\ y)\,dy.$$

Следовательно, при любом выборе последовательности $l_1,\ l_2,\ \ldots$ $\ldots,\ l_k,\ \ldots\to+\infty$ при $k\to+\infty$ будет

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^{l_k} dx\int_c^d f(x,\ y)\,dy=\int_c^d J(y)\,dy.$$

А это означает, что интеграл $\int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,\ y)\,dy$ сходится и имеет место равенство

$$\int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,\ y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,\ y)\,dx.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если $f(x,\ y)$ непрерывна и сохраняет знак при $a\leqslant x<+\infty$, $c\leqslant y\leqslant d$, например неотрицательна, то из непрерывности интеграла*

$$J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,\ y)\,dx$$

на отрезке $[c,\ d]$ следует справедливость равенства (10.32).

Доказательство. Действительно, в силу замечания 2 к теореме 10.5, интеграл $J(y)=\int_a^{+\infty} f(x,\ y)\,dx$ сходится равномерно на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$, а следовательно, в силу теоремы 10.8, справедливо равенство (10.32).

Для знакопостоянной функции $f(x, y)$ справедлива следующая

***Теорема 10.9* (*о перестановке двух несобственных интегрирований*).** *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и сохраняет знак при $c \leqslant y < +\infty$, $a \leqslant x < +\infty$, а интегралы*

$$J(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx, \qquad J^*(x) = \int\limits_c^{+\infty\ -\ ?} f(x, y)\,dy$$

как функции параметров непрерывны соответственно при $c \leqslant y < +\infty$ и $a \leqslant x < +\infty$. Тогда, если хотя бы один из повторных интегралов

$$\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx, \qquad \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x, y)\,dy$$

сходится, то сходится и другой, и они равны между собой, т. е.

$$\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x, y)\,dy.$$

Доказательство. Будем вести доказательство для случая, когда $f(x, y)$ неотрицательна при $c \leqslant y < +\infty$, $a \leqslant x < +\infty$. Допустим, что сходится повторный интеграл

$$J = \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx. \tag{10.33}$$

Тогда нужно доказать, что

$$\lim_{l \to +\infty} \int\limits_a^{l} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x, y)\,dy = J = \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx. \tag{10.34}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Докажем, что при всех достаточно больших l разность между переменной величиной $\int\limits_a^{l} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x, y)\,dy$ и ее предполагаемым пределом $\int\limits_a^{+\infty} dy \int\limits_c^{\infty} f(x, y)\,dx$ будет по абсолютной величине меньше ε.

Прежде чем оценивать эту разность, заметим, что, в силу следствия теоремы 10.8,

$$\int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^l f(x, y)\,dx.$$

Учитывая, что $f(x, y)$ неотрицательна, можно записать

$$0 \leqslant \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx - \int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy = \int_c^{+\infty} dy \int_l^{+\infty} f(x, y)\,dx =$$

$$= \int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x, y)\,dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_l^{+\infty} f(x, y)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x, y)\,dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx. \tag{10.35}$$

Оценим сначала второе слагаемое в правой части неравенства (10.35). Поскольку повторный интеграл (10.33) сходится, то найдется такое c_1, что

$$\int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.36}$$

Фиксировав c_1 так, чтобы выполнялось неравенство (10.36), перейдем к оценке первого слагаемого в правой части неравенства (10.35). По условию интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ является непрерывной на отрезке $c \leqslant y < +\infty$ функцией и, следовательно, поскольку $f(x, y)$ неотрицательна, сходится равномерно на отрезке $c \leqslant y \leqslant c_1$ (по замечанию 2 к теореме 10.5). Поэтому можно найти такое $L(\varepsilon)$, что при всех $l > L(\varepsilon)$ неравенство $\int_l^{+\infty} f(x, y)\,dx < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c)}$ будет выполняться сразу для всех $y \in (c, c_1)$. Но тогда при всех $l > L(\varepsilon)$ будет

$$\int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x, y)\,dx < \frac{\varepsilon (c_1 - c)}{2 (c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.37}$$

Сопоставляя (10.35), (10.36) и (10.37) заключаем, что

$$0 \leqslant \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx - \int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy < \varepsilon$$

при всех $l > L(\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Если на знак функции не наложено никаких ограничений, то имеет место следующая

Теорема 10.9′ (о перестановке двух несобственных интегрирований). *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y < +\infty$, а интегралы*

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \tag{10.38}$$

сходятся равномерно: первый — на каждом конечном отрезке $a \leqslant x \leqslant A$, а второй — на каждом конечном отрезке $c \leqslant y \leqslant C$. Тогда если хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)|\,dy, \qquad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)|\,dx \tag{10.39}$$

сходится, то сходятся и равны между собой повторные интегралы

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{\infty} f(x, y)\,dy, \qquad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx. \tag{10.40}$$

Доказательство. Пусть сходится, например, второй из интегралов (10.39). Тогда, в силу двукратно примененного признака сравнения — один раз для функций $f(x, y)$ и $|f(x, y)|$, а другой раз для функций $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} |f(x, y)|\,dx$ —, второй из интегралов (10.40) также сходится.

Поэтому нужно доказать только, что

$$\lim_{l \to +\infty} \int_a^{l} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx. \tag{10.41}$$

В силу равномерной сходимости интеграла $\int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy$, при любом конечном $l > a$ будет

$$\int_a^{l} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{l} f(x, y)\,dx. \tag{10.42}$$

Оценим разность между переменной величиной $\int\limits_a^l dx \int\limits_c^{+\infty} f(x, y)\,dy$ и предполагаемым пределом $\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ в соотношении (10.41). Воспользовавшись равенством (10.42), мы получим при любом $c_1 > c$, что

$$\left|\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx - \int\limits_a^l dx \int\limits_c^{+\infty} f(x, y)\,dy\right| =$$
$$= \left|\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx - \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^l f(x, y)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_l^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| = \left|\int\limits_c^{c_1} dy \int\limits_l^{+\infty} f(x, y)\,dx + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{c_1}^{+\infty} dy \int\limits_l^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_c^{c_1} dy \int\limits_l^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| +$$
$$+ \int\limits_{c_1}^{+\infty} dy \int\limits_l^{+\infty} |f(x, y)|\,dx \leqslant \left|\int\limits_c^{c_1} dy \int\limits_l^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| +$$
$$+ \int\limits_{c_1}^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} |f(x, y)|\,dx. \qquad (10.43)$$

Так как повторный интеграл $\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} |f(x, y)|\,dx$ по условию сходится, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $c_1 > c$, что будет

$$\int\limits_{c_1}^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} |f(x, y)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (10.44)$$

Фиксировав $c_1 > c$, выбираем, как в доказательстве теоремы 10.9 $\left(\text{пользуясь равномерной сходимостью } \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx\right)$, такое $L(\varepsilon)$, чтобы при всех $l > L(\varepsilon)$ неравенство $\left|\int\limits_l^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c)}$

выполнялось сразу для всех $y \in [c, c_1]$. Тогда

$$\left| \int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon (c_1 - c)}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.45}$$

при всех $l > L(\varepsilon)$, а следовательно, в силу (10.43), (10.44) и (10.45) при всех таких l будет

$$\left| \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx - \int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy \right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что аналогичные теоремы имеют место также и для зависящих от параметра несобственных интегралов от неограниченных функций.

4. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Критерий Коши. *Для равномерной сходимости интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ *на отрезке* $[c, d]$ *необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $L = L(\varepsilon)$, *что при всех* l' *и* $l'' > L(\varepsilon)$ *неравенство*

$$\left| \int_{l'}^{l''} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon \tag{10.46}$$

выполнялось бы сразу для всех $y \in [c, d]$.

Доказательство. Это условие является необходимым. Действительно, в случае равномерной сходимости при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такое $L = L(\varepsilon)$, что при всех $l' > L(\varepsilon)$ и всех $l'' > L(\varepsilon)$ неравенства

$$\left| \int_{l'}^{\infty} f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left| \int_{l''}^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

будут выполняться сразу для всех $y \in [c, d]$. Поэтому при всех l' и $l'' > L(\varepsilon)$ и сразу для всех $y \in [c, d]$ будет выполняться неравенство

$$\left| \int_{l'}^{l''} f(x, y)\, dx \right| = \left| \int_{l'}^{\infty} f(x, y)\, dx - \int_{l''}^{\infty} f(x, y)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{l'}^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| + \left| \int_{l''}^{\infty} f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это условие является достаточным. Действительно, если при всех l' и $l'' > L(\varepsilon)$ неравенство (10.46) выполняется сразу для всех $y \in [c, d]$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится при каждом $y \in [c, d]$ (см. п. 3 § 1 гл. 9), и, переходя к пределу в (10.46) при $l'' \to +\infty$, получим, что при всех $l' > L(\varepsilon)$ неравенство

$$\left| \int\limits_{l'}^{+\infty} f(x, y)\,dx \right| \leqslant \varepsilon$$

выполняется сразу для всех $y \in [c, d]$. Теорема доказана.

Мажорантный достаточный признак равномерной сходимости (признак Вейерштрасса). *Если* $|f(x, y)| \leqslant g(x)$ *при* $a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$, *причем интеграл* $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ *сходится, то интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x, y)|\,dx$ *сходятся равномерно на отрезке* $c \leqslant y \leqslant d$.

Доказательство. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$, найдется такое $L = L(\varepsilon)$, что при всех l' и $l'' > L(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\int\limits_{l'}^{l''} g(x)\,dx < \varepsilon \qquad (l'' > l');$$

но тогда при всех l' и $l'' > L(\varepsilon)$ будут также выполняться и неравенства

$$\left| \int\limits_{l'}^{l''} f(x, y)\,dx \right| \leqslant \int\limits_{l'}^{l''} |f(x, y)|\,dx \leqslant \int\limits_{l'}^{l''} g(x)\,dx < \varepsilon \qquad (l'' > l')$$

сразу для всех $y \in [c, d]$. Следовательно, в силу критерия Коши, интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} |f(x, y)|\,dx$ сходятся равномерно на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$, что и требовалось доказать.

Для несобственных интегралов от неограниченных функций с конечными пределами интегрирования признаки равномерной сходимости формулируются и доказываются аналогичным образом. Сформулируем для примера

***Критерий Коши** (для равномерно сходящегося интеграла). Для равномерной сходимости интеграла*

$$J^*(y)=\int_a^b f(x,\ y)\,dx=\lim_{\lambda\to 0+0}\int_a^{b-\lambda} f(x,\ y)\,dx,\qquad c\leqslant y\leqslant d,\quad (10.47)$$

по параметру y на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon>0$ существовало такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что при всех λ' и λ'' из интервала $0<\lambda<\delta(\varepsilon)$ неравенство

$$\left|\int_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} f(x,\ y)\,dx\right|<\varepsilon \qquad (10.48)$$

выполнялось сразу для всех $y\in[c,\ d]$.

Примеры. 1. Ясно что интеграл $J(p)=\int_0^1 x^{p-1}\,dx$ сходится при $p>0$ и расходится при $p\leqslant 0$. Пусть $p_0>0$; при $0<x<1$ неравенство $x^{p-1}\leqslant x^{p_0-1}$ будет выполняться при всех $p\geqslant p_0$. Поэтому в мажорантном признаке можно взять $f(x,\ p)=x^{p-1}$, $g(x)=x^{p_0-1}$, и, в силу сходимости интеграла

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 x^{p_0-1}dx=\left.\frac{x^{p_0}}{p_0}\right|_0^1=\frac{1}{p_0},$$

интеграл $J(p)=\int_0^1 f(x,\ p)\,dx=\int_0^1 x^{p-1}\,dx$ будет сходиться равномерно относительно параметра p на отрезке $0<p_0\leqslant p<+\infty$, сколь бы мало ни было $p_0>0$.

Посмотрим, будет ли этот интеграл сходиться равномерно на отрезке $0<p<+\infty$. Для этого изучим поведение интеграла $\int_0^\lambda x^{p-1}dx$ при $p\to 0+0$. Имеем $\int_0^\lambda x^{p-1}\,dx=\frac{\lambda^p}{p}\to+\infty$ при $p\to 0+0$ и любом сколь угодно малом фиксированном $\lambda>0$. Следовательно, при любом $\varepsilon>0$ неравенство

$$\left|\int_0^\lambda x^{p-1}\,dx\right|<\varepsilon$$

не может быть выполнено сразу для всех p из интервала $0 < p < +\infty$, как бы мало ни было $\lambda > 0$, т. е. на интервале $0 < p < +\infty$ интеграл $J(p) = \int\limits_0^1 x^{p-1}\,dx$ сходится неравномерно.

2. Интеграл $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$ сходится равномерно при $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$, как бы мало ни было $\alpha_0 > 0$, в силу мажорантного признака, если положить $f(x, \alpha) = e^{-\alpha x^2}$, $g(x) = e^{-\alpha_0 x^2}$, так как $|f(x, \alpha)| = e^{-\alpha x^2} \leqslant g(x) = e^{-\alpha_0 x^2}$ при $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$, $0 \leqslant x < +\infty$, причем интеграл $\int\limits_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x^2}\,dx$ сходится.

Докажем, что если устранить число $\alpha_0 > 0$, не допускающее стремления α к нулю, и рассмотреть полный интервал значений α, при которых интеграл $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$ сходится, т. е. интервал $0 < \alpha < +\infty$, то на нем этот интеграл не будет сходит ся равномерно. Для этого прежде всего заметим, что $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ есть некоторая положительная константа, как интеграл от неотрицательной непрерывной функции, не равной тождественно нулю.

Оценим теперь остаток интеграла $\int\limits_l^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$ при как угодно большом фиксированном l и $0 < \alpha < +\infty$. Полагая $t = x\sqrt{\alpha}$, $dt = \sqrt{\alpha}\,dx$, получим

$$\int\limits_l^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int\limits_{l\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \to +\infty \quad \text{при} \quad \alpha \to 0+0,$$

так как

$$\lim_{\alpha \to 0+0} \int\limits_{l\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \text{const} > 0.$$

Следовательно, при любом $l > 0$ и малом фиксированном ε неравенство

$$\left| \int\limits_l^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int\limits_{l\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \right| < \varepsilon$$

не может выполняться сразу для всех α из интервала $0<\alpha<+\infty$, т. е. интеграл $J(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$ на всем интервале $0<\alpha<+\infty$ сходится неравномерно.

3. Докажем, что интеграл $J(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx$ при $0\leqslant\alpha<+\infty$ и фиксированном $\beta\neq 0$ сходится р а в н о м е р н о относительно параметра α. Оценим для этого остаток интеграла $\int\limits_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx$, полагая $u=\frac{1}{x}$, $dv=e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx$ и интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx=-\left.\frac{e^{-\alpha x}\sin(\beta x+\varphi)}{x\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right|_{x=l}^{+\infty}-\int\limits_l^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}\sin(\beta x+\varphi)\,dx}{x^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

где φ — вспомогательный угол, определяемый соотношениями $\cos\varphi=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\sin\varphi=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Так как $\left|\frac{e^{-\alpha x}\sin\beta x}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right|\leqslant\frac{1}{|\beta|}$ при $\beta\neq 0$ у всех $x\geqslant 0$ и всех $\alpha\geqslant 0$, то, следовательно,

$$\left|\int\limits_l^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx\right|\leqslant\frac{1}{l|\beta|}+\frac{1}{|\beta|}\int\limits_l^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{2}{l|\beta|}<\varepsilon\quad\text{при}\quad l>\frac{2}{|\beta|\varepsilon}$$

сразу для всех α, $0\leqslant\alpha<+\infty$, что и означает равномерную сходимость интеграла.

Если интеграл, зависящий от параметра y на отрезке $[c, d]$, является несобственным по нескольким причинам, то интервал интегрирования разбиваем на конечное число интервалов таким образом, чтобы (если это возможно) каждый из отвечающих им интегралов был несобственным по какой-либо одной причине: либо из-за наличия особенности у подынтегральной функции, либо из-за бесконечности интервала интегрирования. Первоначальный интеграл называется равномерно сходящимся относительно параметра y на отрезке $c\leqslant y\leqslant d$ тогда и только тогда, когда каждый из частичных интегралов, полученных при таком разбиении, сходится равномерно на этом отрезке.

5. Примеры вычисления несобственных интегралов с помощью дифференцирования и интегрирования по параметру. Интегралы в этих примерах служат не только для демонстрации методов, но почти все представляют также самостоятельный интерес и находят применения в различных разделах математики и физики.

1. Зная, что

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n}\,\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

при $m < n$, где m и n — натуральные числа (см. пример 3 § 3 гл. 9), докажем, пользуясь теоремой 10.6 о непрерывной зависимости интеграла от параметра, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin p\pi} \tag{А}$$

при $0 < p < 1$. Сделав замену переменного интегрирования, получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}. \tag{Б}$$

Заметим, что функция $f(t, p)$ является непрерывной при $0 < t < +\infty$, $0 < p < 1$, и что интеграл $\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$ сходится равномерно относительно p на любом отрезке вида $0 < p_1 \leqslant p \leqslant p_2 < 1$. $\Bigl($Последнее легко установить, разбив интеграл $\int_0^{+\infty}$ на два: $\int_0^1$ и $\int_1^{+\infty}$, и применив к ним мажорантный признак с мажорирующими функциями $\frac{t^{p_1-1}}{1+t}$ и $\frac{t^{p_2-1}}{1+t}$ соответственно$\Bigr)$. Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$ является непрерывной функцией параметра p при $0 < p < 1$. Так как любое значение p из этого интервала может быть получено как предел последовательности чисел вида $\frac{2m+1}{2n}$, где $m < n$, то, переходя к пределу в (Б), получим требуемое равенство (А). Равенство (А) используется в теории эйлеровых интегралов (см. § 4 настоящей главы).

2. Вычислим интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$. Непосредственно его нельзя дифференцировать по параметру β, но мы знаем (см. п.2 § 1), что более общий интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$, отличающийся от данного «множителем сходимости» $e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, можно вычислить, применяя дифференцирование по параметру и это дает (см. там же),

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Было доказано (пример 3 п. 4), что последний интеграл сходится равномерно по α при фиксированном β и $0 \leqslant \alpha < +\infty$, следовательно, он является непрерывной функцией параметра α при $0 \leqslant \alpha < +\infty$. Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \lim_{\alpha \to 0+0} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+0} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при} \quad \beta > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \beta = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при} \quad \beta < 0. \end{cases} \tag{10.49}$$

В частности,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{10.50}$$

Последний интеграл используется в теории рядов и интегралов Фурье.

3. Вычислим интеграл Пуассона (см. также конец гл. 9)

$$J = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{10.51}$$

Его сходимость была установлена ранее (см. п. 4 § 1 гл. 9). Полагая $x = ut$, $dx = u\,dt$, получим

$$J = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2t^2} u\, dt.$$

Умножая обе части последнего равенства на e^{-u^2}, найдем

$$Je^{-u^2}=\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}u\,dt. \tag{10.52}$$

Интегрирование последнего равенства по u дает

$$J^2=J\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du=\int_0^{+\infty} du\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}u\,dt. \tag{10.53}$$

Подынтегральная функция $f(t,\ u)=e^{-(1+t^2)u^2}u$ неотрицательна и непрерывна при $0\leqslant t<+\infty$, $0\leqslant u<+\infty$. Внутренний интеграл в (10.53) является, согласно (10.52), непрерывной функцией u при $0\leqslant u<+\infty$. Изменив формально порядок интегрирования, получим повторный интеграл

$$\int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}u\,du, \tag{10.54}$$

внутренний интеграл которого

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=-\frac{1}{2}\,\frac{e^{-(1+t^2)u^2}}{1+t^2}\Bigg|_{u=0}^{u=+\infty}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2} \tag{10.55}$$

является непрерывной функцией t при $0\leqslant t<+\infty$. Следовательно, по теореме 10.9 о перестановке двух несобственных интегрирований в случае знакопостоянной подынтегральной функции интеграл (10.54) также будет сходящимся и будет равен интегралу (10.53). Таким образом, в силу (10.55),

$$\int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$J=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{10.56}$$

Этот интеграл имеет различные применения, в частности, в теории теплопроводности, в теории вероятностей и статистической физике.

4. Вычислим интеграл

$$J(\beta)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx,\quad \text{где}\quad \alpha=\text{const}>0, \tag{10.57}$$

имеющий применение в теории теплопроводности и в статистической физике. Его сходимость следует, например, из сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$. Дифференцируя формально по β, получим равенство

$$\frac{dJ}{d\beta}=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}(-x)\sin\beta x\,dx. \tag{10.58}$$

Справедливость равенства (10.58) нетрудно обосновать. В самом деле: 1) $e^{-\alpha x^2}\cos\beta x$ и $e^{-\alpha x^2}x\sin\beta x$ непрерывны при $-\infty<\beta<+\infty$, $0\leqslant x<+\infty$, и 2) интеграл (10.57) сходится при $-\infty<\beta<+\infty$, а интеграл (10.58) сходится равномерно относительно β при $-\infty<\beta<+\infty$, в силу мажорантного признака с мажорирующей функцией $g(x)=e^{-\alpha x^2}$; таким образом, равенство (10.58) действительно имеет место по теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Интегрируя в (10.58) по частям (по x), получим

$$\frac{dJ}{d\beta}=e^{-\alpha x^2}\frac{\sin\beta x}{2\alpha}\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}-\frac{\beta}{2\alpha}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=-\frac{\beta}{2\alpha}J(\beta).$$

Разделяя переменные в полученном дифференциальном уравнении для $J(\beta)$, найдем

$$\frac{dJ}{J}=-\frac{\beta\,d\beta}{2\alpha}. \tag{10.59}$$

Интегрируя (10.59), получим

$$J(\beta)=Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \tag{10.60}$$

Найдем теперь константу C. Согласно (10.56) имеем

$$J(0)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2}\,dz=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\quad (z=x\sqrt{\alpha}). \tag{10.61}$$

Следовательно, в силу (10.60) и (10.61),

$$J(0)=C=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Подставляя этот результат в (10.60), будем иметь

$$J(\beta)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \tag{10.62}$$

5. Вычислим интегралы Френеля $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$, находящие применение в оптике. Полагая $x^2 = t$, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Вычислим, например, первый из них. Заметив, что $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,du$ (см. 10.61), получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t\,dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\sin t\,du. \tag{10.63}$$

Если бы в интеграле (10.63) было легко обосновать изменение порядка интегрирования, то вычисления было бы легко довести до конца. Однако непосредственно это делается весьма громоздко, поэтому, как в примере 1, мы введем множитель сходимости e^{-kt}, где $k = \text{const} > 0$, т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-kt}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin u\,du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+(k+u^2)^2}. \tag{10.64}$$

В этом случае перестановка двух интегрирований легко обосновывается с помощью теоремы 10.9. Так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kt}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ сходится равномерно при $0 \leqslant k < +\infty$ и его подынтегральная функция непрерывна при $0 \leqslant k < +\infty$, $0 \leqslant t < +\infty$, то он является непрерывной функцией k на отрезке $0 \leqslant k < +\infty$. Поэтому, переходя к пределу при $k \to 0+0$, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}.$$

Разлагая дробь на простейшие и выполняя интегрирование, находим

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{10.65}$$

Аналогичным путем доказывается, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{10.66}$$

6. Рассмотрим, наконец, интеграл Фруллани

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx, \quad \text{где} \quad 0 < a < b. \tag{10.67}$$

Остановимся на двух основных случаях:

1) Если $f'(x)$ непрерывна и интегрируема на полупрямой $0 \leqslant x < +\infty$, а $f(x)$ стремится к определенному конечному пределу $f(+\infty)$ при $x \to +\infty$, т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(x)\,dx = f(+\infty) - f(0),$$

то интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(ux)\,dx \tag{10.68}$$

сходится равномерно по параметру u на отрезке $0 < a \leqslant u \leqslant b$. Действительно, так как $f(x)$ стремится к конечному пределу $f(+\infty)$ при $x \to +\infty$, то для $f(x)$ выполнен критерий Коши, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что при всех x' и $x'' > N(\varepsilon)$ будет $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Но тогда $\left| \int\limits_{A'}^{A''} f'(ux)\,dx \right| = \left| \frac{1}{u} \int\limits_{A'u}^{A''u} f'(t)\,dt \right| = \left| \frac{f(A''u) - f(A'u)}{u} \right| \leqslant \frac{1}{a} |f(A''u) - f(A'u)| < \varepsilon$ при всех A' и $A'' > \frac{1}{a} N(\varepsilon)$ сразу для всех u из отрезка $a \leqslant u \leqslant b$. Поэтому интеграл (10.67) можно вычислить, интегрируя (10.68) по параметру в пределах от a до b, т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_a^b f'(ux)\,du = \int\limits_a^b du \int\limits_0^{+\infty} f'(ux)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{f(+\infty)-f(0)}{u}\,du = [f(+\infty) - f(0)] \ln\frac{b}{a}. \tag{10.69}$$

2) Если не существует конечный предел $f(x)$ при $x \to +\infty$, но сходится интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$, $A > 0$, и существует производная $f'(0)$,

то

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = -f(0)\ln\frac{b}{a}. \qquad (10.70)$$

Действительно,

$$\int_0^{as} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = \int_0^{s} \frac{f(ax)-f(0)}{x}\,dx \quad (t=ax);$$

$$\int_0^{bs} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = \int_0^{s} \frac{f(bx)-f(0)}{x}\,dx \quad (t=bx).$$

Следовательно,

$$\int_0^{s} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = \int_{as}^{bs} \frac{f(t)}{t}\,dt - f(0)\int_{as}^{bs}\frac{dt}{t} =$$

$$= \int_{as}^{bs} \frac{f(t)}{t}\,dt - f(0)\ln\frac{b}{a},$$

откуда, переходя к пределу при $s \to +\infty$, получим (10.70).

Равенства Фруллани (10.69) и (10.70) можно применять к вычислению различных конкретных интегралов. Так, с помощью (10.69), находим (всюду $0 < a < b$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\,dx = \ln\frac{a}{b}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a},$$

а с помощью (10.70) находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx - \sin ax}{x}\,dx = 0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x}\,dx = \ln\frac{a}{b}.$$

§ 3. Эйлеровы интегралы

Эйлеровы интегралы

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx \text{ — } \textit{гамма-функция} \text{ от } p$$

и

$$B(p, q) = \int_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \text{ — } \textit{бета-функция} \text{ от } p,\ q$$