то

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = -f(0)\ln\frac{b}{a}. \tag{10.70}$$

Действительно,

$$\int_0^{as} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = \int_0^{s} \frac{f(ax)-f(0)}{x}\,dx \quad (t=ax);$$

$$\int_0^{bs} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = \int_0^{s} \frac{f(bx)-f(0)}{x}\,dx \quad (t=bx).$$

Следовательно,

$$\int_0^{s} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = \int_{as}^{bs} \frac{f(t)}{t}\,dt - f(0)\int_{as}^{bs}\frac{dt}{t} =$$

$$= \int_{as}^{bs} \frac{f(t)}{t}\,dt - f(0)\ln\frac{b}{a},$$

откуда, переходя к пределу при $s\to+\infty$, получим (10.70).

Равенства Фруллани (10.69) и (10.70) можно применять к вычислению различных конкретных интегралов. Так, с помощью (10.69), находим (всюду $0<a<b$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\,dx = \ln\frac{a}{b}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a},$$

а с помощью (10.70) находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx - \sin ax}{x}\,dx = 0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x}\,dx = \ln\frac{a}{b}.$$

§ 3. Эйлеровы интегралы

Эйлеровы интегралы

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx \text{ — } \textit{гамма-функция} \text{ от } p$$

и

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \text{ — } \textit{бета-функция} \text{ от } p,\ q$$

играют важную роль в различных разделах математики и математической физики. Поскольку бета-функция может быть выражена через гамма-функции (см. соотношение (10.81)), то мы в первую очередь остановимся на исследовании свойств гамма-функции.

1. Свойства гамма-функции.

1) Интеграл $\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ сходится при $0<p<+\infty$ и расходится при $p\leqslant 0$ (см. конец § 2 гл. 9). При $p<1$ он является несобственным не только потому, что интервал интегрирования бесконечен, но и потому, что при $p<1$ подынтегральная функция стремится к бесконечности при $x\to 0+0$.

Докажем, что интеграл $\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ сходится равномерно по параметру p на любом конечном отрезке $0<p_0\leqslant p\leqslant \leqslant P_0<+\infty$. Как и в случае исследования этого интеграла на простую сходимость, разобьем интервал интегрирования $[0, +\infty)$ на два: $0\leqslant x\leqslant 1$ и $1\leqslant x<+\infty$, и займемся исследованием на равномерную сходимость интегралов $\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx$ и $\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$. Интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx$ сходится равномерно при $0<p_0\leqslant p<+\infty$ в силу мажорантного признака, так как $e^{-x}x^{p-1}\leqslant x^{p_0-1}$ при $0<x<1$ и $p\geqslant p_0$, а интеграл $\int\limits_0^1 x^{p_0-1}\,dx$ при $p_0>0$ сходится. Остаток

$$\int\limits_0^{\lambda} x^{p-1}\,e^{-x}\,dx \geqslant \int\limits_0^{\lambda} x^{p-1}e^{-1}\,dx = e^{-1}\int\limits_0^{\lambda} x^{p-1}\,dx = \frac{\lambda^p}{pe} \to +\infty$$

при $p\to 0+0$ и $\lambda=\mathrm{const}>0$. Следовательно, на интервале $0<p<+\infty$ интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx$ сходится неравномерно.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ сходится равномерно при $-\infty<p<<P_0<+\infty$, где P_0 — произвольное фиксированное число, в силу мажорантного признака, так как

$$x^{p-1}e^{-x}\leqslant x^{P_0-1}e^{-x} \quad \text{при} \quad 1\leqslant x<+\infty,\ -\infty<p<P_0,$$

а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^{P_0-1}e^{-x}\,dx$ сходится. На интервале $-\infty < p < +\infty$ этот интеграл равномерно сходиться не будет. Чтобы это доказать, исследуем остаток $\int\limits_l^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ при $p \to +\infty$ и любом фиксированном $l > 1$. Каково бы ни было натуральное N, при $p \to +\infty$, начиная с некоторого значения p, будет $p-1 > N$, и мы будем иметь неравенство

$$\int\limits_l^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx > \int\limits_l^{+\infty} x^N e^{-x}\,dx = -e^{-x}x^N\Big|_{x=l}^{+\infty} + N\int\limits_l^{+\infty} x^{N-1}e^{-x}\,dx =$$
$$=[l^N + Nl^{N-1} + N(N-1)\,l^{N-2} + \ldots + N!]\,e^{-l} \to +\infty \text{ при } N \to +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{p\to+\infty} \int\limits_l^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = +\infty$$

при любом фиксированном $l > 0$.

Итак, интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx$ сходится равномерно на интервале $0 < p_0 \leqslant p < +\infty$, где p_0 — произвольное положительное число, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ сходится равномерно на интервале $-\infty < p \leqslant P_0 < +\infty$, где P_0 — произвольное конечное число. Поэтому оба они одновременно сходятся равномерно на любом отрезке вида $0 < p_0 \leqslant p \leqslant P_0$, а следовательно, и интеграл $\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ сходится равномерно относительно p на каждом таком отрезке.

2) Так как подынтегральная функция $f(x, p) = x^{p-1}e^{-x}$ непрерывна при $0 < x < +\infty$, $0 < p < +\infty$, а сходимость

$$\lim_{\substack{l\to+\infty\\ \lambda\to 0+0}} \int\limits_\lambda^l x^{p-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$$

является равномерной по p на каждом конечном отрезке $0 < p_0 \leqslant p \leqslant P_0 < +\infty$, то $\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ является непрерывной функцией на каждом таком отрезке, т. е. непрерывной функцией при всех p, удовлетворяющих неравенству $0 < p < +\infty$.

3) Дифференцируя $\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ по p под знаком интеграла, получим

$$\Gamma'(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)\,e^{-x}\,dx. \tag{10.71}$$

Равенство (10.71) справедливо, так как интеграл (10.71) сходится равномерно на каждом конечном отрезке $0 < p_0 \leqslant p \leqslant P_0 < +\infty$ и частная производная $f'_p(x, p) = x^{p-1}(\ln x)\,e^{-x}$ непрерывна при $0 < x < +\infty$, $0 < p < +\infty$. Равномерная сходимость интеграла (10.71) устанавливается применением мажорантного признака к интегралам:

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}(\ln x)\,e^{-x}\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{\infty} x^{p-1}(\ln x)\,e^{-x}\,dx$$

с мажорирующими функциями $x^{p_0-1}|\ln x|$ и $x^{P_0-1}|\ln x|\,e^{-x}$ соответственно.

Аналогично устанавливаются существование производной любого порядка $k = 1, 2, 3, \ldots$ и справедливость равенства

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^k e^{-x}\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10.72}$$

4) Интегрируя по частям, находим

$$p\Gamma(p) = p\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = x^p e^{-x}\Big|_{x=0}^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx,$$

т. е.

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \tag{10.73}$$

Применяя повторно рекуррентную формулу (10.73), можно свести вычисление $\Gamma(a+n)$, где $0 < a \leqslant 1$, а n — произвольное натуральное число, к вычислению $\Gamma(a)$:

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+1)\,a\,\Gamma(a). \tag{10.74}$$

Если положить $a = 1$ и учесть, что

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1, \tag{10.75}$$

то формула (10.74) даст

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n! \tag{10.76}$$

5) Вычислим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx,$$

полагая $x=t^2$. Получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}. \tag{10.77}$$

6) График функции $\Gamma(p)$ имеет вид, изображенный на рис. 10.1, причем $\Gamma(p)\to+\infty$ при $p\to 0+0$ и при $p\to+\infty$. Значения $\Gamma(p)$ при натуральных значениях p находятся по формулам (10.83) и (10.84).

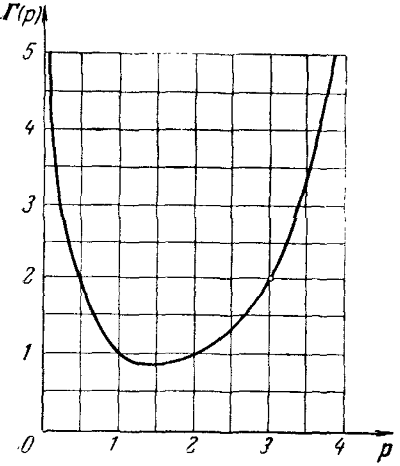

Рис. 10.1.

Так как $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, то по теореме Ролля $\Gamma'(p)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке интервала $1<p<2$; пусть это будет p_0. Так как $\Gamma''(p)=$ $=\int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^2 e^{-x}\,dx>0$ при всех p, $0<p<+\infty$, то $\Gamma'(p)$ монотонно возрастет при $0<p<+\infty$ и не может иметь при $0<p<+\infty$ корней, отличных от p_0; кроме того, в силу монотонного возрастания, $\Gamma'(p)<0$ при $p<p_0$ и $\Gamma'(p)>0$ при $p>p_0$. Значит, $\Gamma(p)$ при $p=p_0$ достигает минимума. Приведем численные значения:

$$p_0\approx 1{,}4616,\quad \min\Gamma(p)=\Gamma(p_0)=0{,}8856.$$

Так как при $p\geqslant 2$ гамма-функция возрастает, то при $p>n+1$, где $n\geqslant 1$, будет $\Gamma(p)>\Gamma(n+1)=n!$ Следовательно, $\Gamma(p)\to+\infty$ при $p\to+\infty$. Далее,

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

при $p>0$. Следовательно, $\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}\to+\infty$ при $p\to 0$, так как $\Gamma(p+1)\to\Gamma(1)=1$ при $p\to 0+0$.

2. Свойства бета-функции.

1) Интеграл $\mathrm{B}(p,\,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ сходится при $p>0$ и $q>0$.

2) С помощью замены переменной интегрирования $x = 1 - t$, получаем, что

$$B(p, q) = B(q, p). \tag{10.78}$$

Следовательно, бета-функция симметрична относительно p и q.

3) Если $q > 1$, то

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1}\, d\left(\frac{x^p}{p}\right) =$$

$$= \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\bigg|_{x=0}^{x=1} + \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p (1-x)^{q-2}\, dx =$$

$$= \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\, dx - \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx =$$

$$= \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q).$$

Следовательно,

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) \text{ при } q > 1. \tag{10.79}$$

Если $p > 1$, то, в силу симметрии бета-функции, используя (10.79), можно записать

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q) \text{ при } p > 1. \tag{10.79'}$$

4) Выполнив в интеграле $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$ замену переменной интегрирования $x = \frac{z}{1+z}$, получим для бета-функции новое аналитическое представление:

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\, dz. \tag{10.80}$$

5) Связь между функциями B и Г. Докажем, что при $p > 0$ и $q > 0$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{10.81}$$

Сделав в интеграле $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$ замену переменной $x = tz$, $t > 0$, $dx = t\, dz$, получим

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^{+\infty} z^{p-1} e^{-tz}\, dz. \tag{10.82}$$

Заменив в (10.82) t на $1+t$ и p на $p+q$, получим

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^{+\infty} z^{p+q-1}e^{-(1+t)z}\,dz. \tag{10.83}$$

Умножим обе части последнего равенства на t^{p-1} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(p+q)\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}t^{p-1}z^{p+q-1}e^{-(1+t)z}\,dz.$$

В силу (10.80), последнее равенство перепишется так:

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}z^{p+q-1}t^{p-1}e^{-(1+t)z}\,dz. \tag{10.84}$$

В интеграле (10.84) при $p>1$ и $q>1$ допустима перестановка двух интегрирований, в силу теоремы 10.9 о перестановке двух несобственных интегрирований в случае знакопостоянной подынтегральной функции. Действительно,

а) функция

$$f(z,t)=z^{p+q-1}t^{p-1}e^{-(1+t)z}\geqslant 0$$

и заведомо непрерывна при $0\leqslant z<+\infty$, $0\leqslant t<+\infty$;

б) если $p>1$ и $q>1$, то интеграл (10.84) сходится;

в) интеграл

$$\int_0^{+\infty}t^{p-1}z^{p+q-1}e^{-(1+t)z}\,dz=\Gamma(p+q)\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$$

является непрерывной функцией t при $0\leqslant t<+\infty$, а интеграл

$$\int_0^{+\infty}t^{p-1}z^{p+q-1}e^{-(1+t)z}\,dt=\Gamma(p)\,z^{q-1}e^{-z}$$

является непрерывной функцией z при $0\leqslant z<+\infty$. Следовательно, в силу упомянутой теоремы, повторный интеграл $\int_0^{+\infty}dz\int_0^{+\infty}z^{p+q-1}t^{p-1}e^{-(1+t)z}\,dt$ также сходится и равен интегралу (10.84).

Таким образом,

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,\,q)=\int_0^{+\infty}dz\int_0^{+\infty}z^{p+q-1}t^{p-1}e^{-(1+t)z}\,dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}z^{p+q-1}e^{-z}\,dz\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-tz}\,dt=\int_0^{+\infty}z^{p+q-1}e^{-z}\,\frac{\Gamma(p)}{z^p}\,dz=$$

$$=\Gamma(p)\int_0^{+\infty}z^{q-1}e^{-z}\,dz=\Gamma(p)\,\Gamma(q).$$

Следовательно, равенство (10.81) имеет место при $p>1$ и $q>1$.

Чтобы доказать его справедливость при $p>0$ и $q>0$, применим к этому равенству, написанному для $p>1$ и $q>1$, рекуррентные формулы (10.79), (10.80) к левой части и (10.73) к правой части.

6) Имеет место равенство

$$\mathrm{B}(p,\,1-q)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad\text{при}\quad 0<p<1. \qquad (10.85)$$

Действительно, подставляя в формулу (10.80) $q=1-p$, получим

$$\mathrm{B}(p,\,1-q)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz,\quad 0<p<1. \qquad (10.86)$$

Но в п. 5 § 2 (пример 1) было доказано, что интеграл (10.86) равен $\frac{p}{\sin p\pi}$ при $0<p<1$, откуда и следует справедливость соотношения (10.85). Воспользовавшись формулой (10.81), из (10.85) получим так называемую *формулу дополнения*:

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad\text{при}\quad 0<p<1. \qquad (10.87)$$

Многие интегралы можно вычислять, сводя их к эйлеровым интегралам.

Примеры.

1. $$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\,\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

2. Вычислим интеграл $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^{\frac{3}{2}} x\,dx$. Полагая $\sin^2 x = z$, получим $\sin x = z^{\frac{1}{2}}$, $\cos x = (1-z)^{\frac{1}{2}}$, $dz = 2\sin x \cos x\,dx$. Следовательно, учитывая предыдущий пример, будем иметь

$$J = \mathrm{B}\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}.$$

3. Вычислим интеграл

$$J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x\,dx, \quad p>0, \quad q>0.$$

Полагая $\sin^2 x = z$, получим

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 z^{\frac{p}{2}-1}(1-z)^{\frac{q}{2}-1}\,dz =$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$

В частности, при $q=1$ найдем

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}.$$

§ 4. Кратные собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметров

Для краткости мы будем рассматривать только тройные интегралы, зависящие от параметров; однако все рассуждения будут иметь силу и для интегралов любой кратности, кроме тех случаев, которые будут оговорены особо.

Пусть функция $f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ определена при $(x, y, z) \in \Omega$ и $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega^*$, где Ω и Ω^* — области пространств (x, y, z) и (α, β, γ) соответственно, и пусть интеграл

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)\,dx\,dy\,dz \qquad (10.88)$$