2. Вычислим интеграл $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^{\frac{3}{2}} x\,dx$. Полагая $\sin^2 x = z$, получим $\sin x = z^{\frac{1}{2}}$, $\cos x = (1-z)^{\frac{1}{2}}$, $dz = 2\sin x \cos x\,dx$. Следовательно, учитывая предыдущий пример, будем иметь

$$J = \mathrm{B}\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}.$$

3. Вычислим интеграл

$$J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x\,dx, \quad p>0, \quad q>0.$$

Полагая $\sin^2 x = z$, получим

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 z^{\frac{p}{2}-1}(1-z)^{\frac{q}{2}-1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$

В частности, при $q=1$ найдем

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}.$$

§ 4. Кратные собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметров

Для краткости мы будем рассматривать только тройные интегралы, зависящие от параметров; однако все рассуждения будут иметь силу и для интегралов любой кратности, кроме тех случаев, которые будут оговорены особо.

Пусть функция $f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ определена при $(x, y, z) \in \Omega$ и $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega^*$, где Ω и Ω^* — области пространств (x, y, z) и (α, β, γ) соответственно, и пусть интеграл

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)\,dx\,dy\,dz \qquad (10.88)$$

существует в собственном или несобственном смысле при любых $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega^*$. Тогда он является функцией параметров (α, β, γ), определенной в области Ω^*.

Справедливы следующие предложения:

1) *Если* $f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ *непрерывна, как функция* $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ *в области* $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}^*$, *причем* $\overline{\Omega}$ *и* $\overline{\Omega}^*$ — *замкнутые ограниченные области* *), *то, как и в одномерном случае,* $J(\alpha, \beta, \gamma)$ *будет непрерывной функцией параметров* α, β, γ *в* $\overline{\Omega}^*$.

2) *Если, кроме того,* $f'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ *также непрерывна в* $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}^*$, *то*

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \iiint_{\Omega} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)\, dx\, dy\, dz = \\ = \iiint_{\Omega} f'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)\, dx\, dy\, dz. \qquad (10.89)$$

Аналогично обстоит дело с дифференцированием по β и γ.

3) *Наконец, при условиях предложения* 1) *допустимо интегрирование интеграла по параметру.*

Предложения 1) — 3) доказываются так же, как и в одномерном случае. Они легко распространяются на интегралы вида

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \iiint_{\Omega} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)\, g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \qquad (10.90)$$

где $f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ удовлетворяют прежним требованиям, а

$$\iiint_{\Omega} |g(x, y, z)|\, dx\, dy\, dz < K = \text{const} < +\infty,$$

причем интеграл $\iiint_{\Omega} |g(x, y, z)|\, dx\, dy\, dz$ может быть собственным или несобственным.

Пример. Потенциал гравитационного поля, создаваемого телом Ω с плотностью массы $\rho(M) = \rho(x, y, z)$ в точке $Q(x_0, y_0, z_0)$, лежащей вне тела, равен

$$U(Q) = U(x_0, y_0, z_0) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(P)}{r_{PQ}}\, dx\, dy\, dz, \qquad (10.91)$$

*) Областью $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}^*$ называется множество всех точек $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ шестимерного евклидова пространства, получающихся, когда точка (x, y, z) пробегает $\overline{\Omega}$ и, независимо от нее, точка (α, β, γ) пробегает $\overline{\Omega}^*$.

где $r_{PQ}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ — расстояние между точками $P(x, y, z)$ и $Q(x_0, y_0, z_0)$. Функция $f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)=$ $=\frac{1}{r_{PQ}}$, если точка Q лежит на положительном расстоянии от тела Ω, непрерывна и имеет непрерывные производные $\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \frac{\partial f}{\partial z_0}$. Плотность $\rho(x, y, z)$ можно считать абсолютно интегрируемой функцией в Ω. Дифференцируя (10.91) по x_0, y_0 и z_0 по правилу Лейбница (см. соотношение (10.89)), получим проекции на оси координат силы притяжения материальной точки $Q(x_0, y_0, z_0)$ единичной массы телом Ω:

$$\left.\begin{aligned} F_x(Q)&=\frac{\partial U}{\partial x_0}=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(P)}{r_{PQ}^3}(x-x_0)\,dx\,dy\,dz,\\ F_y(Q)&=\frac{\partial U}{\partial y_0}=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(P)}{r_{PQ}^3}(y-y_0)\,dx\,dy\,dz,\\ F_z(Q)&=\frac{\partial U}{\partial z_0}=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(P)}{r_{PQ}^3}(z-z_0)\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right\}\qquad(10.92)$$

Если точка $Q(x_0, y_0, z_0)$ лежит внутри тела Ω, то $r_{PQ}=0$ при совпадении P с Q. Следовательно, Q является особой точкой подынтегральной функции интегралов (10.91) и (10.92) и эти интегралы становятся несобственными, даже если $\rho(P)=\rho(x, y, z)$ является ограниченной интегрируемой функцией в Ω. Характерной чертой этих несобственных интегралов, зависящих от параметров (x_0, y_0, z_0), является то, что координаты особой точки подынтегральной функции зависят от этих параметров, а именно, равны им. Мы ограничимся рассмотрением несобственных кратных интегралов, зависящих от параметров, вида

$$J(Q)=\iiint\limits_{\Omega}F(P, Q)\,f(P)\,dx\,dy\,dz,\qquad(10.93)$$

где

$$P(x, y, z)\in\Omega,\quad Q(x_0, y_0, z_0)\in\Omega.$$

Функция $F(P, Q)$ непрерывна при $P\neq Q$ и становится неограниченной при $P\to Q$, а $f(P)$ — ограниченная интегрируемая в Ω функция. (Интегралы (10.91) и (10.92) являются частными случаями интеграла вида (10.93).)

Определение. *Интеграл* (10.93) *называется* ***равномерно сходящимся в точке*** $Q(x_0, y_0, z_0)$, *если для всякого* $\varepsilon>0$

существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, *что неравенство*

$$\left| \iiint\limits_{\Omega_{\delta(\varepsilon)}} F(P, Q') f(P)\, dx\, dy\, dz \right| < \varepsilon \tag{10.94}$$

выполняется для любой области $\Omega_{\delta(\varepsilon)}$ *диаметра* $< \delta(\varepsilon)$, *содержащей в себе точку* Q, *и для любой точки* Q', *расстояние которой от* Q *меньше* $\delta(\varepsilon)$.

Достаточный признак равномерной сходимости. *Интеграл* (10.93) *сходится равномерно в точке* $Q(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, *если существуют такая окрестность точки* $Q(x_0, y_0, z_0)$ *и такие константы* C *и* λ, *что при всех* P *и* Q' *из этой окрестности выполняется неравенство*

$$|F(P, Q')| \leqslant \frac{C}{r_{PQ'}^{\lambda}}, \quad \text{где} \quad \lambda = \mathrm{const} < 3, \quad C = \mathrm{const} < +\infty. \tag{10.95}$$

Доказательство. По условию $|f(P)| < K = \mathrm{const} < \infty$ всюду в Ω. Следовательно, если шар радиуса $\delta(\varepsilon)$ с центром в Q, $Ш_{\delta(\varepsilon)}(Q)$, лежит в упомянутой окрестности точки Q, то для любой области $\Omega_{\delta(\varepsilon)}$ диаметра $< \delta(\varepsilon)$, содержащей в себе Q и для любой точки $Q' \in Ш_{\delta(\varepsilon)}$ будет

$$\left| \iiint\limits_{\Omega_{\delta(\varepsilon)}} F(P, Q') f(P)\, dx\, dy\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \iiint\limits_{\Omega_{\delta(\varepsilon)}} \frac{C}{r_{PQ'}^{\lambda}} K\, dx\, dy\, dz \leqslant$$

$$\leqslant CK \iiint\limits_{Ш_{2\delta(\varepsilon)}(Q')} \frac{dx\, dy\, dz}{r_{PQ'}^{\lambda}}, \tag{10.96}$$

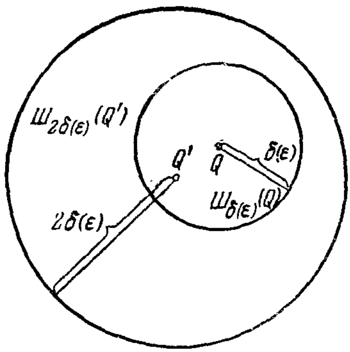

Рис. 10.2.

где $Ш_{2\delta(\varepsilon)}(Q')$ — шар радиуса $2\delta(\varepsilon)$ с центром в Q' (рис. 10.2). Переходя к сферическим координатам с полюсом в точке Q', получим

$$\iiint\limits_{Ш_{2\delta(\varepsilon)}} \frac{dx\, dy\, dz}{r_{PQ'}^{\lambda}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\theta} d\theta \int\limits_0^{2\delta(\varepsilon)} \frac{r^2 \sin\theta}{r^{\lambda}}\, dr =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^{2\delta(\varepsilon)} r^{2-\lambda}\, dr = \frac{4\pi}{3-\lambda} [2\delta(\varepsilon)]^{3-\lambda}. \tag{10.96'}$$

Из (10.96) и (10.96′) следует, что

$$\left|\iiint\limits_{\Omega_{\delta(\varepsilon)}} F(P,\ Q')\, f(P)\, dx\, dy\, dz\right| \leqslant \frac{4\pi}{3-\lambda}\,[2\delta(\varepsilon)]^{3-\lambda} \qquad (10.97)$$

Так как $3-\lambda > 0$, то при достаточно малом $\delta(\varepsilon)$ правая часть (10.97) будет меньше ε, что и требовалось доказать.

Замечание. В случае N-кратного интеграла ($N \geqslant 1$) показатель λ в признаке должен удовлетворять неравенству $\lambda < N$.

Если плотность массы $\rho(P)$ в интегралах (10.91) и (10.92) является ограниченной интегрируемой функцией в Ω, то, в силу доказанного признака, эти интегралы будут равномерно сходящимися в любой точке $Q(x_0,\ y_0,\ z_0) \in \Omega$.

Из равномерной сходимости вытекают следствия, такие же как и в случае однократных интегралов. Рассмотрим для примера теоремы о непрерывности интеграла, как функции параметров, и о дифференцировании интеграла по параметру.

Теорема 10.10. *Если интеграл* (10.93) *сходится равномерно в точке* $Q \in \Omega$, *то при сформулированных ранее ограничениях на функции* $F(P,\ Q)$ *и* $f(P)$ *интеграл* (10.93) *является непрерывной функцией в точке* $Q \in \Omega$.

Доказательство. Докажем, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что из неравенства $|r_{QQ'}| < \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $|J(Q) - J(Q')| < \varepsilon$. Для этого возьмем шар $Ш_{\delta(\varepsilon)}(Q)$ радиуса $\delta(\varepsilon)$ с центром в Q, лежащий внутри Ω (рис. 10.3), и разобьем каждый из интегралов $J(Q)$ и $J(Q')$ на два слагаемых: J_1 по области $Ш_{\delta(\varepsilon)}(Q)$ и J_2 по области $\Omega - Ш_{\delta(\varepsilon)}(Q)$. Тогда

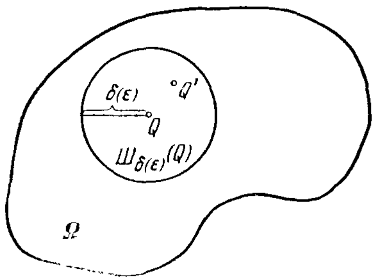

Рис. 10.3.

$$|J(Q) - J(Q')| \leqslant |J_2(Q) - J_2(Q')| + \\ + |J_1(Q)| + |J_1(Q')|. \qquad (10.98)$$

При достаточно малом $\delta(\varepsilon) > 0$ и второе и третье слагаемые в правой части (10.98) (каждое) будут $< \frac{\varepsilon}{3}$, в силу равномерной сходимости интеграла в точке Q. Если взять какое угодно положительное $\delta'(\varepsilon) < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$, то при условии, что расстояние от Q до Q' удовлетворяет неравенству

$$|\overline{QQ'}| < \delta'(\varepsilon), \qquad (10.99)$$

интегралы в первом слагаемом в правой части (10.98) будут собственными. Следовательно, если взять $\delta'(\varepsilon) < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$ достаточно малым, то по теореме о непрерывной зависимости собственного кратного интеграла от параметров первое слагаемое в правой части (10.98) также будет $<\frac{\varepsilon}{3}$ при условии (10.99). Сопоставляя эти результаты, получаем, что, в силу (10.98), из выполнения неравенства (10.99) будет следовать выполнение неравенства

$$|J(Q)-J(Q')|<\varepsilon, \tag{10.100}$$

что и требовалось доказать.

Исследование дифференцируемости по параметру несобственного интеграла вида (10.93) в общем случае выходит за рамки данной книги (см., напр., [12], Лекц. VII, § 2). Покажем, как решается этот вопрос в случае, когда $F(P,\ Q)=1/r_{PQ}$, $f(P)=\rho(P)$, где $\rho(P)$ — ограниченная ($|\rho(P)|<C=\text{const}<+\infty$) в Ω интегрируемая функция, т. е. когда интеграл имеет вид (10.91). Этот случай является весьма существенным для теории потенциала (см. вып. 4). Если точка $Q(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит вне Ω ($P(x,\ y,\ z)$ пробегает Ω), то интеграл (10.91) является собственным и, как было доказано выше, выполняются равенства (10.92). Докажем, что равенства (10.92) сохраняют силу и в том случае, когда точка $Q(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит внутри Ω. Ограничимся рассмотрением первого из равенств (10.92). Для его доказательства докажем, что разность

$$\begin{aligned}\alpha=\frac{U(x_0+\Delta x_0,\ y_0,\ z_0)-U(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\Delta x_0}-\\ -\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(P)(x-x_0)}{r_{PQ}^3}\,dx\,dy\,dz\end{aligned} \tag{10.101}$$

стремится к нулю при $\Delta x_0\to 0$ и фиксированной $Q(x_0,\ y_0,\ z_0)\in\Omega$. Пусть дано какое-угодно $\varepsilon>0$. Опишем из точки $Q(x_0,\ y_0,\ z_0)$ шар достаточно малого радиуса $\delta(\varepsilon)$, $Ш_{\delta(\varepsilon)}(Q)$, лежащий внутри Ω, и обозначим через $U_1(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и $U_2(x_0,\ y_0,\ z_0)$ интеграл (10.91), взятый по области $\Omega_1=Ш_{\delta(\varepsilon)}(Q)$ и $\Omega_2=\Omega-\Omega_1=\Omega-Ш_{\delta(\varepsilon)}(Q)$. Очевидно, $U=U_1+U_2$, поэтому разность (10.101) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\alpha=\left\{\frac{\Delta U_1}{\Delta x_0}\right\}+\left\{-\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\rho(P)(x-x_0)}{r_{PQ}^3}\,dx\,dy\,dz\right\}+\\ +\left\{\frac{\Delta U_2}{\Delta x_0}-\iiint\limits_{\Omega_2}\frac{\rho(P)(x-x_0)}{r_{PQ}^3}\,dx\,dy\,dz\right\}.\end{aligned} \tag{10.102}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (10.102). Мы имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta U_1}{\Delta x_0}=\frac{1}{\Delta x_0}\iiint\limits_{\Omega_1}\rho(P)\left(\frac{1}{r_{PQ'}}-\frac{1}{r_{PQ}}\right)dx\,dy\,dz=\\ =\frac{1}{\Delta x_0}\iiint\limits_{\Omega_1}\rho(P)\,\frac{r_{PQ}-r_{PQ'}}{r_{PQ}r_{PQ'}}\,dx\,dy\,dz,\end{aligned} \tag{10.103}$$

где Q' — точка с координатами $(x_0+\Delta x_0,\ y_0,\ z_0)$, лежащая в $\Omega_1 = Ш_{\delta(\varepsilon)}(Q)$. Стороны треугольника QPQ' равны r_{PQ}, $r_{PQ'}$ и $|\Delta x_0|$; поэтому

$$|r_{PQ'} - r_{PQ}| \leqslant |\Delta x_0|. \tag{10.104}$$

Учитывая оценку (10.104) и очевидное неравенство

$$\frac{1}{r_{PQ}r_{PQ'}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_{PQ}^2} + \frac{1}{r_{PQ'}^2}\right),$$

получаем для (10.103) оценку

$$\left|\frac{\Delta U_1}{\Delta x_0}\right| \leqslant \frac{C}{2}\iiint\limits_{\Omega_1}\left(\frac{1}{r_{PQ}^2} + \frac{1}{r_{PQ'}^2}\right)dx\,dy\,dz, \text{ так как } |\rho(P)| \leqslant C. \tag{10.105}$$

Интеграл $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{dx\,dy\,dz}{r_{PQ}^2}$ сходится равномерно в $\Omega_1 = Ш_{\delta(\varepsilon)}(Q)$ (см. достаточный признак); поэтому правая часть неравенства (10.105) будет $< \frac{\varepsilon}{3}$ при достаточно малом $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Второе слагаемое в правой части (10.102) в силу неравенства $|x - x_0|/r_{PQ} \leqslant 1$ и достаточного признака равномерной сходимости также является равномерно сходящимся интегралом и поэтому будет по модулю $< \frac{\varepsilon}{3}$ при всех достаточно малых $\delta = \delta(\varepsilon)$. Оценим, наконец, третье слагаемое в правой части (10.102). Так как $U_2(x_0,\ y_0,\ z_0) = \displaystyle\iiint\limits_{\Omega_2}\frac{\rho(P)}{r_{PQ}}\,dx\,dy\,dz$ является интегралом вида (10.90) (точка $Q(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит вне Ω_2), то его можно дифференцировать по параметру x_0, а следовательно, при всех достаточно малых $|\Delta x_0| < \delta = \delta(\varepsilon)$ будет

$$\left|\frac{\Delta U_2}{\Delta x_0} - \iiint\limits_{\Omega_2}\frac{\rho(P)(x - x_0)}{r_{PQ}^3}\,dx\,dy\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.106}$$

Таким образом вся разность (10.101) будет по модулю $< \varepsilon$ при всех достаточно малых $\delta = \delta(\varepsilon)$ и $|\Delta x_0|$, что и требовалось доказать.

Замечание. Результаты, полученные в этом параграфе для интегралов по объему, без труда переносятся на интегралы по кривым и поверхностям. Надлежащее видоизменение формулировок и доказательств предоставляется сделать читателям.