ГЛАВА 11

РЯДЫ ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

В естествознании и технике часто приходится иметь дело с **периодическими процессами**: колебательным и вращательным движением различных деталей машин и приборов, периодическим движением небесных тел и элементарных частиц, акустическими и электромагнитными колебаниями и т. п.

Математически все такие процессы описываются периодическими функциями. *Функция $f(t)$ одной переменной t называется* **периодической**, *если существует такое число $T \neq 0$, называемое ее* **периодом**, *что*

$$f(t+T)=f(t) \text{ при всех значениях } t, \quad -\infty<t<+\infty. \qquad (11.1)$$

Простейшими периодическими функциями являются, как известно, тригонометрические функции $\sin t$ и $\cos t$ с периодом $T=2\pi$.

В физике простейшей периодической функцией обычно считают «**гармонику**» (или «**гармоническое колебание**»)

$$\xi(t)=A\sin(\omega t+\varphi), \quad -\infty<t<+\infty. \qquad (11.2)$$

Так как

$$\xi\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\xi(t) \quad \text{при} \quad -\infty<t<+\infty, \qquad (11.3)$$

то $T=\frac{2\pi}{\omega}$ есть период гармоники. Константы A, ω и φ называются соответственно **амплитудой**, **частотой** и **начальной фазой** гармоники.

Одним из основных вопросов настоящей главы является вопрос о представлении произвольной периодической функции в виде суммы гармоник.

§ 1. Предварительные сведения о периодических функциях и постановка основной задачи

1. Периоды периодической функции. Пусть $f(t)$ — периодическая функция с периодом $T \neq 0$, т. е.

$$f(t+T)=f(t) \quad \text{при всех } t, \quad -\infty<t<+\infty. \qquad (11.4)$$

Тогда любое целочисленное кратное периода kT, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, также является периодом этой функции.

Действительно, если T — период, то при любом целом $k > 1$ будет

$$f(t+kT) = f[t+(k-1)T+T] = f[t+(k-1)T] = \ldots = f(t) \quad (11.5)$$

при всех t, $-\infty < t < +\infty$, то есть kT является периодом $f(t)$. Далее,

$$f[t-T] = f[(t-T)+T] = f(t) \text{ при всех } t, \ -\infty < t < +\infty, \quad (11.6)$$

а следовательно, число $-T$ является периодом $f(t)$. Но тогда по только что доказанному число $k(-T) = -kT$ при любом целом $k > 1$ также является периодом $f(t)$. Утверждение доказано.

Пусть теперь числа T_1 и T_2 являются периодами функции $f(t)$; тогда легко проверить, что числа $T_1 \pm T_2$ также являются периодами этой функции.

Очевидно, тождественную константу можно рассматривать как периодическую функцию с каким угодно периодом, иными словами, любое число будет ее периодом.

Если $f(t)$ — непрерывная периодическая функция, отличная от тождественной константы, то она имеет наименьший положительный период *), *который обычно и называют периодом этой функции.*

2. Периодическое продолжение непериодической функции. Отправляясь от непериодической функции $f(x)$ **), заданной на отрезке $a \leqslant x \leqslant a+T$, можно построить периодическую функцию $F(x)$ с периодом T, совпадающую с $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant a+T$. Если рассуждать геометрически, то для этого нужно выполнить переносы графика функции $f(x)$ параллельно оси x вправо и влево на расстояния $T, 2T, 3T, \ldots, nT, \ldots$ (рис. 11.1). Этот процесс мы назовем *периодическим продолжением функции $f(x)$ за пределы отрезка $a \leqslant x \leqslant a+T$ с периодом T*. При этом $F(x)$ не получает, вообще говоря, однозначного определения в точках вида $x = a \pm kT$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

---

*) Если бы непрерывная периодическая функция $f(t)$, отличная от тождественной константы, не имела наименьшего положительного периода, то, как нетрудно показать, нашлась бы последовательность ее положительных периодов $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$, сходящаяся к нулю. Их всевозможные целочисленные кратные представляли бы всюду плотное множество точек на оси t, $-\infty < t < +\infty$, а следовательно, значения $f(t)$ на этом всюду плотном множестве были бы равны значению $f(t)$ в начале координат. Таким образом, $f(t)$ была бы равна тождественной константе $f(0)$ на этом всюду плотном множестве и, в силу непрерывности, она была бы равна тождественной константе на всей оси t, $-\infty < t < +\infty$, что противоречит условию.

**) В дальнейшем независимую переменную мы всюду будем обозначать через x.

3. Интеграл от периодической функции. Если $f(x)$ является периодической интегрируемой функцией с периодом T, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx$ при любом a, $-\infty < a < +\infty$. Действительно,

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_a^T f(x)\,dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_a^T f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx,$$

так как, в силу периодичности функции,

$$\int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_T^{a+T} f(x-T)\,dx = \int\limits_0^a f(x')\,dx', \quad \text{где} \quad x' = x - T.$$

Таким образом, интеграл от периодической функции с периодом T по любому отрезку длины T имеет одно и то же значение.

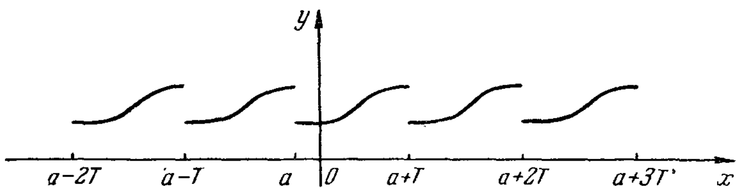

Рис. 11.1.

4. Арифметические действия над периодическими функциями. Очевидно, что сумма, разность, произведение и частное функций с одним и тем же периодом T являются периодическими функциями с периодом T.

Если периоды T_f и T_g двух периодических функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно соизмеримы, т. е. $T_f : T_g = p : q$, где p и q — целые числа, то число $T^* = pT_g = qT_f$ будет периодом как функции $f(x)$, так и функции $g(x)$. Следовательно, сумма, разность, произведение и частное этих функций также будут периодическими функциями с периодом T^*.

Если же периоды T_f и T_g функций $f(x)$ и $g(x)$ несоизмеримы, то сумма таких функций уже не является периодической функцией, она будет так называемой *почти периодической функцией*.

Сформулируем определение почти периодической функции. *Функция* $f(x)$, *непрерывная на всей вещественной оси* $-\infty < x < +\infty$, *называется* *почти периодической, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $L = L(\varepsilon) > 0$, что на любом интервале длины L, $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + L$, $-\infty < \alpha < +\infty$, найдется по крайней мере один «почти период» $\tau = \tau(\varepsilon)$, соответствующий данному ε, т. е. такое число $\tau = \tau(\varepsilon)$, что*

$$|f(x + \tau(\varepsilon)) - f(x)| < \varepsilon$$

при всех x, $-\infty < x < +\infty$.

(Очевидно, что периодические функции являются частным случаем почти периодических.) Можно доказать, что сумма, разность, произведение и частное (если делитель $\neq 0$) двух любых почти периодических функций является почти периодической функцией, т. е. что множество всех почти периодических функций (в отличие от множества всех периодических функций) замкнуто относительно основных арифметических операций.

5. Суперпозиция гармоник с кратными частотами. Рассмотрим последовательность гармоник

$$A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{11.7}$$

Очевидно, число $T_k = \frac{T}{k}$ является периодом k-й гармоники *). Следовательно, число $T = kT_k$ является общим периодом всех гармоник последовательности (11.7). Частотой k-й гармоники является $\lambda_k = \frac{2\pi k}{T}$, $k = 1, 2, \ldots$ Таким образом, частоты гармоник последовательности (11.7) являются целочисленными кратными одного и того же числа $\frac{2\pi}{T}$. Такие гармоники мы будем называть гармониками с кратными частотами.

Сумма или, как говорят физики, *суперпозиция конечного числа таких гармоник*

$$f_N(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right) \tag{11.8}$$

является периодической функцией периода T, так как число T является общим периодом всех этих гармоник **).

Аналогично суперпозиция бесконечного числа таких гармоник, точнее, сумма сходящегося ряда

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right), \tag{11.9}$$

также является периодической функцией с периодом T.

---

*) Действительно, $\sin\left[\frac{2\pi k}{T}\left(x + \frac{T}{k}\right) + \varphi_k\right] = \sin\left[\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right) + 2\pi\right] = \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right)$.

**) Напомним, что константу A_0 можно считать периодической функцией с каким угодно периодом и, в частности, с периодом T.

Равенства (11.8) и (11.9) можно преобразовать так. Учитывая, что

$$A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x+\varphi_k\right)=A_k\sin\varphi_k\cos\frac{2\pi k}{T}x+A_k\cos\varphi_k\sin\frac{2\pi k}{T}x,$$

положим

$$\frac{a_0}{2}=A_0,\quad a_k=A_k\sin\varphi_k,\quad b_k=A_k\cos\varphi_k,\quad 2l=T;$$

тогда равенства (11.8) и (11.9) примут вид

$$f_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{11.10}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{11.11}$$

В правой и левой частях равенств (11.10) и (11.11) все функции являются периодическими с периодом $2l$.

Заметим, что функции $f_N(x)$ и $f(x)$ имеют уже более сложную природу, чем составляющие их гармоники или функции $\cos\frac{k\pi x}{l}$ и $\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k=1, 2, 3, \ldots$ (см., например, рис. 7, *б*).

Ряд (11.11) *называют* ***тригонометрическим***, *а равенство* (11.11), *если оно имеет место*, — ***разложением функции*** $f(x)$ ***в тригонометрический ряд***.

6. Постановка основной задачи. Основной задачей настоящей главы является исследование вопросов:

1) *Какую периодическую функцию с периодом* $2l$ *можно разложить в тригонометрический ряд вида* (11.11), *т. е. представить в виде суммы такого ряда*?

2) *Как найти коэффициенты разложения* (11.11) a_0, a_k *и* b_k, *если это разложение возможно?*

3) *Какова зависимость между характером сходимости ряда* (11.11) *и свойствами функции* $f(x)$?

7. Ортогональность тригонометрической системы; коэффициенты Фурье и ряд Фурье. Разложение (11.11) — это разложение функции $f(x)$ в ряд по функциям системы:

$$\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi x}{l},\quad \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\quad \sin\frac{k\pi x}{l},\ \ldots, \tag{11.12}$$

которую мы будем называть *основной тригонометрической системой*.

Основная тригонометрическая система является *ортогональной на отрезке* $[-l, l]$ в следующем смысле: интеграл по отрезку

$[-l, l]$ от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а интеграл по отрезку $[-l, l]$ от квадрата любой функции этой системы отличен от нуля.

Действительно,

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{x=-l}^{x=l} = 0,\\
&\int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{x=-l}^{x=l} =\\
&\qquad = -\frac{1}{2}\frac{l}{k\pi}[(-1)^k-(-1)^k] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (11.13_1)$$

Далее,

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{(k+n)\pi}{l}x + \cos\frac{(k-n)\pi}{l}x\right]dx = 0 \text{ при } k \neq n. \quad (11.13_2)$$

Аналогично находим

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \quad \text{при} \quad k \neq n,\\
&\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \quad \text{при} \quad k \gtreqless n.
\end{aligned}\right\} \quad (11.13_3)$$

Наконец,

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l}\frac{1+\cos^2\frac{k\pi x}{l}}{2}\,dx = l,\\
&\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l}\frac{1-\cos^2\frac{k\pi x}{l}}{2}\,dx = l,\\
&\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{l}{2}.
\end{aligned}\right\} \quad (11.13_4)$$

Решим теперь вопрос об определении коэффициентов a_0, a_k, b_k разложения (11.11).

Если ряд (11.11) *сходится равномерно или в среднем на отрезке* $[-l, l]$ *к функции* $f(x)$, *то его можно интегрировать почленно*. Это утверждение сохраняет силу и после умножения равенства (11.11) на любую интегрируемую функцию. Последнее обстоятельство в сочетании с ортогональностью системы (11.12) позволяет найти коэффициенты a_0, a_k и b_k разложения (11.11). Интегрируя равенство (11.11) почленно, получим

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} dx + \sum_{k=0}^{+\infty}\left[a_k \int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx + b_k\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\right] = a_0 l,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx. \tag{11.14$_0$}$$

Чтобы определить коэффициент a_n при $\cos\frac{n\pi x}{l}$, умножим равенство (11.11) на $\cos\frac{n\pi x}{l}$ и проинтегрируем по x от $-l$ до l; это даст (в силу $(11.13_1)-(11.13_4)$)

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= a_n\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = a_n l,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{11.14$_1$}$$

Аналогично, чтобы определить коэффициент b_n при $\sin\frac{n\pi x}{l}$, умножим равенство (11.11) на $\sin\frac{n\pi x}{l}$ и проинтегрируем по x от

$-l$ до $+l$; это даст (в силу (11.13$_1$)—(11.13$_4$))

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = b_n l,$$

откуда

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{11.14$_2$}$$

Определение 1. *Числа* a_0, a_n *и* b_n, *определяемые по формулам* (11.14$_0$), (11.14$_1$) *и* (11.14$_2$), *называются* ***коэффициентами Фурье*** *функции* $f(x)$ *по основной тригонометрической системе* (11.12).

Определение 2. *Тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{11.15}$$

коэффициенты a_0, a_k и b_k *которого определяются по формулам* (11.14$_0$), (11.14$_1$) и (11.14$_2$) *через функцию* $f(x)$, *называется* ***рядом Фурье*** *функции* $f(x)$.

Заметим, что для существования интегралов (11.14$_0$), (11.14$_1$) и (11.14$_2$) достаточно интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$. Поэтому каждой интегрируемой на отрезке $[-l, l]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{11.16}$$

т. е. тригонометрический ряд, коэффициенты которого определяются по формулам (11.14$_0$), (11.14$_1$) и (11.14$_2$). Однако, если от функции $f(x)$ не требовать ничего, кроме интегрируемости на отрезке $[-l, l]$, то знак соответствия в соотношении (11.16), вообще говоря, нельзя заменить знаком равенства. В следующем параграфе мы выясним некоторые достаточные условия, при выполнении которых это можно сделать.

8. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, называется *четной*, если

$$f(-x) = f(x) \quad \text{при всех} \quad x \in [-l, l]. \tag{11.17}$$

Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, называется *нечетной*, если

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{при всех} \quad x \in [-l, l]. \tag{11.18}$$

Из этих определений следует, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Если $f(x)$ — произвольная функция, заданная на отрезке $[-l, l]$, то первая из функций

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{и} \quad f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \tag{11.19}$$

является четной, а вторая — нечетной, причем

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \text{при всех} \quad x \in [-l, l], \tag{11.20}$$

а следовательно, всякая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций.

Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-l, l]$, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx = \int_{0}^{l} [f(x)+f(-x)]\,dx \tag{11.21}$$

(так как при замене x на $-x$ получаем

$$\int_{-l}^{0} f(x)\,dx = -\int_{l}^{0} f(-x)\,dx = \int_{0}^{l} f(-x)\,dx).$$

Из соотношения (11.21) следует, что

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)\,dx, & \text{если функция } f(x) \text{ четная,} \\ 0, & \text{если функция } f(x) \text{ нечетная.} \end{cases} \tag{11.22}$$

Функции $\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{l}$, $\cos\frac{2\pi x}{l}$, $\ldots$, $\cos\frac{k\pi x}{l}$ — четные, а функции $\sin\frac{\pi x}{l}$, $\sin\frac{2\pi x}{l}$, $\ldots$, $\sin\frac{k\pi x}{l}$ — нечетные.

Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-l, l]$; если функция $f(x)$ *четная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}; \tag{11.23}$$

если же функция $f(x)$ *нечетная*, то ее ряд Фурье имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{11.24}$$

Действительно, если функция $f(x)$ четная, то $f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}$ также четная, а $f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}$ нечетная, поэтому

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,d\xi=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(\xi)\,d\xi,\\
b_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi=0,\\
a_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi.
\end{aligned}\right\}\tag{11.25}$$

Если же функция $f(x)$ нечетная, то $f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}$ нечетная, а $f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}$ четная, поэтому

$$\left.\begin{aligned}
&a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\,d\xi=0, \quad a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi=0,\\
&b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi.
\end{aligned}\right\}\tag{11.26}$$

9. Разложение функций на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если требуется разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, то, полагая в формулах (11.13) и (11.17) $l=\pi$, получим для коэффициентов Фурье и ряда Фурье следующие выражения:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,d\xi, \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos n\xi\,d\xi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin n\xi\,d\xi, \quad f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Общий случай задания функции $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ сводят к только что рассмотренному с помощью замены независимой переменной $x'=\frac{\pi x}{l}$. Функция $\varphi(x')=f\left(\frac{lx}{\pi}\right)$ определена на отрезке $-\pi\leqslant x'\leqslant\pi$, если $f(x)$ определена на отрезке $[-l, l]$.

Однако, имея в виду последующие применения рядов Фурье в математической физике, мы для единообразия написания и выработки надлежащих навыков будем вести все рассмотрения непосредственно для отрезка $[-l, l]$.

§ 2. Основная теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье

Целью настоящего параграфа является доказательство того, что *тригонометрический ряд Фурье* (11.16) *периодической кусочно-гладкой функции* $f(x)$ *с периодом* $2l$ *сходится к* $f(x)$ *в каждой точке непрерывности* $f(x)$.

Сначала вы опишем класс кусочно-гладких функций, играющих важную роль в математической физике, а затем перейдем к изложению основной теоремы.

1. Класс кусочно-гладких функций. *Функция* $f(x)$ *называется* ***кусочно-непрерывной*** *на* $[a, b]$, *если она непрерывна всюду на этом отрезке, исключая, быть может, конечное число точек разрыва первого рода.*

Такая функция имеет в каждой точке x отрезка $[a, b]$ конечные правое и левое предельные значения:

$$f(x+0)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} f(x+z), \quad f(x-0)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} f(x-z), \tag{11.27}$$

а в концах отрезка $[a, b]$ — конечные предельные значения $f(a+0)$ и $f(b-0)$.

Кусочно-непрерывную на $[a, b]$, $a<b$, *функцию* $f(x)$ *называют* ***кусочно-гладкой*** *на* $[a, b]$, *если* $f'(x)$ *существует и непрерывна всюду на этом отрезке, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых, однако, существуют конечные правое и левое предельные значения*

$$f'(x+0)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} f'(x+z), \quad f'(x-0)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} f'(x-z). \tag{11.28}$$

При этом предполагается также, что существуют конечные предельные значения $f'(a+0)$ *и* $f'(b-0)$ *в концах отрезка* $[a, b]$.

Кусочно-гладкая функция $f(x)$ имеет в каждой точке x отрезка $[a, b]$ конечные правую и левую производные:

$$\left.\begin{aligned} f'_{\text{прав}}(x)&=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(x+z)-f(x+0)}{z},\\ f'_{\text{лев}}(x)&=\lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(x-z)-f(x-0)}{-z}. \end{aligned}\right\} \tag{11.29}$$